Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2017

Práctica 0: Resultados Preliminares

Ejercicio 1. Revisar los siguientes teoremas:

1. Teorema de la Función Inversa.
   (`http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_function_theorem`)
2. Teorema de la Función Implícita.
   (`http://en.wikipedia.org/wiki/Implicit_function_theorem`)
3. Teorema de Arzela – Ascoli.
   (`http://en.wikipedia.org/wiki/Arzela-Ascoli_theorem`)
4. Teorema de la Partición de la Unidad.
   (`http://en.wikipedia.org/wiki/Partition_of_unity`)
5. Teorema de la divergencia de Gauss.
   (`http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem`)

Ejercicio 2. Revisar los siguientes teoremas:

1. Teorema de convergencia monótona de Beppo Levi.
   (`http://en.wikipedia.org/wiki/Monotone_convergence_theorem`)
2. Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
   (`http://en.wikipedia.org/wiki/Dominated_convergence_theorem`)
3. Lema de Fatou.
   (`http://en.wikipedia.org/wiki/Fatou's_lemma`)

Ejercicio 3 (Diferenciación bajo el signo integral)**.** Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $V \subset \mathbb{R}^m$ medible, $f\colon U \times V \to \mathbb{R}$ medible y $x_0 \in U$.

1. Si $f(x,\cdot) \in L^1(V)$ para $|x - x_0| < \varepsilon$, $f(\cdot, y)$ es diferenciable en $|x - x_0| < \varepsilon$ para casi todo $y \in V$ y existe $g \in L^1(V)$ tal que $|\partial_{x_j} f(x,y)| \leq g(y)$ para todo $|x - x_0| < \varepsilon$ y para casi todo $y \in V$, con $1 \leq j \leq n$ fijo, entonces la función $F(x) = \int_V f(x,y)\,dy$ es derivable para $|x - x_0| < \varepsilon$ respecto de x_j y se tiene que
$$\partial_j F(x) = \int_V \partial_{x_j} f(x,y)\,dy.$$
2. Verificar que si $\partial_{x_j} f$ es una función continua en $U \times \overline{V}$, con V abierto acotado, entonces verifica las hipótesis del item anterior.

Ejercicio 4. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables.

1. Si $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, calcular la derivada de
$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(s)\,ds.$$
2. Si $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua y $\partial_1 h$ es continua y acotada, calcular la derivada de
$$G(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,s)\,ds.$$

Ejercicio 5. Sean $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ medibles y $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ medible. Demostrar los siguientes resultados.

1. Desigualdad de Hölder: Si $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

2. Desigualdad de Minkowsky: Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces
$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$
3. Desigualdad integral de Minkowsky: Si $1 \leq p < \infty$, entonces
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)\,dx\right|^p dy\right)^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|^p\,dy\right)^{1/p} dx.$$

Ejercicio 6. Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $h \in \mathbb{R}^n$. Se define $\tau_{-h} f(x) := f(x+h)$. Probar los siguientes resultados.

1. Para $1 \leq p < \infty$, $\lim_{h\to 0} \|\tau_{-h} f - f\|_p = 0$.
   Pista: usar que $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.
2. Mostrar que el item anterior no vale para $p = \infty$.

Ejercicio 7 (Desigualdad de Young)**.** Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Probar que entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$, donde el producto de convolución $f * g$ se define como
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\,dy.$$

Ejercicio 8. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y p' el exponente conjugado (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ con la extensión obvia $\frac{1}{0} = \infty$ y $\frac{1}{\infty} = 0$). Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y se tiene que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$. Más aún, $f * g$ es uniformemente continua.

Ejercicio 9. Sean $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ $(k \in \mathbb{N})$, $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$, para todo $|\alpha| \leq k$.

Ejercicio 10 (Núcleo regularizante estándar)**.** Se define la función $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como
$$\rho(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$
Probar que $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Mostrar que si se define $\rho_\varepsilon\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como
$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right),$$
entonces $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\text{sop}(\rho_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$. A la familia $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ se la denomina *núcleo regularizante estándar.*

Ejercicio 11 (Regularización por convolución)**.** Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que
$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1,$$
y para todo $\varepsilon > 0$ se define
$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho(\tfrac{x}{\varepsilon}).$$
Probar que

1. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty \Rightarrow \|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.
2. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y f es uniformemente continua en $V \subset \mathbb{R}^n$, entonces
$$\sup_{x\in V'} |f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| \to 0 \text{ si } \varepsilon \to 0,$$
   para todo $V' \subset\subset V$.
3. Si f es continua y acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces $f * \rho_\varepsilon$ tiende uniformemente a f en cada compacto de $\mathbb{R}^n$.

4. Si además $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
5. Calcular $f * \rho_\varepsilon$ si $f = \chi_{[a,b]}$ y ρ es la función del Ejercicio 10.

Ejercicio 12. Demostrar que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$. Pista: las funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto son densas en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$.

Ejercicio 13. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ medible. Probar que si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ y $\int_U f\varphi\, dx = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(U)$, entonces $f = 0$ en casi todo punto.

Ejercicio 14. Probar que si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ y $\int_{\mathbb{R}} f\varphi'\, dx = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, entonces f resulta constante.

Pista: tomar $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} g = 1$ y para cada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, se verifica que $\varphi(x) - (\int \varphi) g(x)$ es la derivada de una función $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Ejercicio 15 (Fórmulas de Green)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con frontera de clase C^1. El *Teorema de la divergencia de Gauss* dice que si $\mathbf{v}\colon \bar{U} \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$, $v_i \in C^1(U) \cap C^0(\bar{U})$, $1 \le i \le n$, entonces

$$\int_U \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx = \int_{\partial U} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ es el vector normal exterior unitario a ∂U y

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \partial_i v_i.$$

Usar dicho teorema para demostrar las *Fórmulas de Green*: Si $u, v \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$, entonces

$$(1^\circ) \qquad \int_U (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_{\partial U} v \partial_{\mathbf{n}} u\, dS,$$

$$(2^\circ) \qquad \int_U (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial U} (v\partial_{\mathbf{n}} u - u \partial_{\mathbf{n}} v)\; dS,$$

donde $\partial_{\mathbf{n}} u = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ y

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u.$$

Ejercicio 16. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con frontera de clase C^1. Sean $u, v \in C^1(U) \cap C^0(\bar{U})$. Usar el Teorema de la divergencia de Gauss para probar la *Fórmula de integración por partes*

$$\int_U u \partial_i v\, dx = -\int_U \partial_i u\, v\, dx + \int_{\partial U} uv\mathbf{n}_i\, dS,$$

donde $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n)$ es el vector normal exterior unitario a ∂U.