# EQUIVALENCIA DE NORMAS EN $H_0^1(\Omega)$ Y $H_0^2(\Omega)$

ARIEL M. SALORT

## 1. Equivalencia de normas en $W_0^{1,2}(\Omega)$

Recordemos que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ definidas sobre un espacio $X$ son equivalentes si existen constante $c_1$ y $c_2$ tales que

$$c_1\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq c_2\|u\|_1 \qquad \forall u \in X.$$

Muchas propiedades como la continuidad o la convergencia en $X$ no cambian si se consideran normas equivalentes.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se define el espacio de Sobolev

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\}$$

donde $\alpha$ es un multiíndice y las derivadas son en el sentido débil. Este espacio de de Banach con la norma

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{1.1}$$

es decir, $\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

El espacio $W_0^{1,2}(\Omega)$ se define como la clausura de de las funciones $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,2}(\Omega)$ con la norma anterior. Este espacio puede interpretarse como el de las funciones $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tales que se anulan sobre $\partial\Omega$.

Usando la desigualdad de Poincaré, si $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ podemos probar que que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma equivalente en $W_0^{1,2}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} &= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C^2)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},\\
\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Du\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

## 2. Equivalencia de normas en $W_0^{2,2}(\Omega)$

Recordemos que dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definimos $W^{2,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \colon D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 2\}$, donde $\alpha$ es un multiíndice y las derivadas son en el sentido débil. Este espacio es de Banach con la norma

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq 2} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

Es facil ver que una norma equivalente a (2.1) es la siguiente

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq 2} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.2}$$

A la clausura de de las funciones $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{2,2}(\Omega)$ las denotamos $W_0^{2,2}(\Omega)$. Se puede interpretar al espacio $W_0^{2,2}(\Omega)$ como a las funciones $u \in W^{2,2}(\Omega)$ tales que $D^\alpha u = 0$ sobre $\partial\Omega$ para $|\alpha| \leq 1$.

**Theorem 2.1.** *Dada $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$, $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma equivalente a* (2.2).

*Proof.* **Paso 1**. Veamos que la siguiente norma es equivalente a (2.2)

$$|||u|||_{W_0^{2,2}(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para ello busquemos cotas de los sumandos de (2.2).

Cuando $|\alpha| = 1$ obtenemos una cota superior haciendo:

$$\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \left( \int_\Omega u_{x_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^n \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = n\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Usando que $(\sum x_i)^{\frac{1}{2}} \leq \sum x_i^{\frac{1}{2}}$ tenemos una cota inferior:

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^n \left( \int_\Omega u_{x_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Cuando $|\alpha| = 2$ obtenemos la siguiente cota superior:

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i,j=1}^n \left( \int_\Omega u_{x_i x_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i,j=1}^n \left( \int_\Omega u_{x_i x_j x_i} u_{x_j} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left( \int_\Omega u_{x_i x_i} u_{x_j x_j} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i,j=1}^n \left( \left( \int_\Omega u_{x_i x_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\Omega u_{x_j x_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \left( \left( \int_\Omega |\Delta u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\Omega |\Delta u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = n^2 \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Usando que $(\sum x_i)^2 \leq c \sum x_i^2$ y $(\sum x_i)^{\frac{1}{2}} \leq \sum x_i^{\frac{1}{2}}$ tenemos una cota inferior:

$$\begin{aligned}
\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_\Omega |\Delta u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \left( \int_\Omega \Big|\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}\Big|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \left( \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i x_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c \sum_{i=1}^n \left( \int_\Omega u_{x_i x_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \sum_{i,j=1}^n \left( \int_\Omega u_{x_i x_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = c \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Así queda probado el paso 1.

**Paso 2**. Veamos que la norma $|||u|||$ es equivalente a $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$.

Observemos que si $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ vale que

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i} u_{x_i} = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega u u_{x_i x_i} \\
&\le \sum_{i=1}^n \int_\Omega |u u_{x_i x_i}| \le \sum_{i=1}^n \left( \int_\Omega u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\Omega u^2_{x_i x_i} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \sum_{i=1}^n \left( \int_\Omega u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\Omega |\Delta u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le n \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando la desigualdad de Poincaré obtenemos que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le c \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega).$$

Combinando todas las desigualdades podemos escribir lo siquiente:

$$\begin{aligned}
|\|u\||_{W_0^{2,2}(\Omega)} &= \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le (1+c) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \le C \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} = |\|u\||_{W_0^{2,2}(\Omega)}.$$

Por transitividad sigue el resultado. $\square$