COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LOS AUTOVALORES DEL LAPLACIANO

ARIEL M. SALORT

1. Tonos de un tambor

En octubre de 1910 se celebró en la universidad de Göttingen una serie de conferencias sobre “viejos y nuevos problemas de la física”. Allí Hendrik Lorentz habló sobre el modelo matemático que representa las vibraciones en un tambor: el desplazamiento vertical del parche Ω en la posición (x, y) viene dado por la solución de una ecuación del tipo

$$u_{tt} = c(u_{xx} + u_{yy}) \text{ en } \Omega, \qquad u = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

donde c es una constante que depende del tambor y $u = 0$ sobre el borde del parche ya que está fijado al tambor. Lorentz conjeturó que si conociéramos todos los tonos fundamentales del tambor (los autovalores de la ecuación (1.1)), entonces uno podría “escuchar” el área del instrumento.

Matemáticamente, si λ es un autovalor (de hecho hay una sucesión infinita $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, numerable, creciente y no acotada de autovalores) de la ecuación

$$-(u_{xx} + u_{yy}) = \lambda u \text{ en } \Omega, \qquad u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \tag{1.1}$$

entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{2\pi N(\lambda)}{\lambda} = |\Omega|, \tag{1.2}$$

donde $|\Omega|$ es el área del parche y $N(\lambda)$ es la la función contadora de autovalores definida como

$$N(r) = \#\{k \in \mathbb{N} \colon \lambda_k \le r\},$$

la cual nos da el número de autovalores menores o iguales que un valor r dado.

David Hilbert, presente en la reunión dijo que según él, no viviría lo suficiente para ver una prueba del resultado. Sin embargo, cuatro meses despúes, el jéven Hermann Weyl de 25 años, un alumno recién graduado bajo la dirección del mismo Hilbert, probó la conjetura. Es más, dijo que debía corregirse el factor 2π por 4π. Weyl probó que si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es acotado,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{4\pi N(\lambda)}{\lambda} = |\Omega|.$$

Luego este resultado se generalizó a un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: si consideramos los autovalores λ del laplaciano con condiciones de borde Dirichlet, i.e.,

$$-\Delta u = \lambda u \text{ en } \Omega, \qquad u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \tag{1.3}$$

entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\omega_n} \left(\frac{4\pi^2}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} = |\Omega| \tag{1.4}$$

donde $|\Omega|$ es el volumen $n-$dimensional de Ω y ω_n es la medida de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Observar que de la definición de $N(r)$ sigue que si λ_k es el $k-$ésimo autovalor de (1.3), entonces $N(\lambda_k) = k$, y (1.4) puede reescribirse como

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{k^{2/n}} = \frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{2/n}}, \tag{1.5}$$

es decir, nos da el comportamiento asintótico de los autovalores de (1.3).

Veamos que (1.5) (y consecuentemente (1.4)) puede ser deducida relativamente fácil en algunas configuraciones de Ω. Más precisamente, veamos que si $\Omega = (0,a) \subset \mathbb{R}$, entonces, como $\omega_1 = 2$, (1.5) se vuelve

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{k^2} = \frac{4\pi^2}{(2|\Omega|)^2} = \frac{\pi^2}{a^2}. \tag{1.6}$$

En el caso en que $\Omega = (0,a)\times(0,b) \subset \mathbb{R}^2$, como $\omega_2 = \pi$, (1.5) se vuelve

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{k} = \frac{4\pi^2}{(\pi|\Omega|)} = \frac{4\pi}{ab}. \tag{1.7}$$

1.1. **Un segmento.** $\Omega = (0,a)$**.** En este caso tanto los autovalores como las autofunciones de (1.3) pueden ser encontrados explícitamente. En el problema de autovalores del laplaciano con condiciones Dirichlet tenemos que $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{a^2}$ y $\varphi_k(x) = \sin(\frac{k\pi x}{a})$, $k \in \mathbb{N}$. Se obtiene que

$$N(\lambda) = \#\left\{k \in \mathbb{N} \colon \frac{k^2\pi^2}{a^2} \le \lambda\right\} = \#\left\{k \in \mathbb{N} \colon k \le \frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi}\right\} = \frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi}$$

de donde,

$$k = N(\lambda_k) = \frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi},$$

y así obtenemos (1.6),

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{k^2} = \frac{\pi^2}{a^2}.$$

En este caso, como los autovalores se conocen explícitos, la fórmula de $N(\lambda)$ es exacta.

1.2. **Un rectángulo.** $\Omega = (0,a)\times(0,b)$**.** Separando varaibles se ve que

$$\lambda_{i,j} = \frac{i^2\pi^2}{a^2} + \frac{j^2\pi^2}{b^2}, \quad \text{y} \quad \varphi_{i,j}(x) = \sin(\tfrac{i\pi x}{a})\sin(\tfrac{j\pi x}{b}), \quad i,j \in \mathbb{N}$$

y entonces

$$N(\lambda) = \#\left\{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \colon \frac{i^2\pi^2}{a^2} + \frac{j^2\pi^2}{b^2} \le \lambda\right\}.$$

En este caso, $N(\lambda)$ nos estaría dando el número de coordenadas enteras contenidas en el cuarto de elipse

$$E_\lambda \colon \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \colon \left(\frac{x\pi}{\sqrt{\lambda}a}\right)^2 + \left(\frac{y\pi}{\sqrt{\lambda}b}\right)^2 \le 1\right\}$$

y ello es igual a contar la cantidad de cuadraditos con coordenadas enteras completamente contenidos en el cuarto de elipse.

Como la cantidad de cuadraditos es menor que el área del cuarto de elipse tenemos una cota superior de $N(\lambda)$:

$$N(\lambda) \leq \text{área}(E_\lambda) = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{\lambda}a}{\pi}\frac{\sqrt{\lambda}b}{\pi} = \frac{\lambda ab}{4\pi} = \frac{\lambda\text{área}(\Omega)}{4\pi}. \tag{1.8}$$

Si ahora consideramos los cuadraditos con coordenadas enteras incluyendo también los que están sobre el borde de E_λ, obtenemos una aproximación del área de E_λ por exceso. Observar que ahora hay una cantidad de cuadraditos sobre el borde de E_λ proporcional al perímetro de E_λ, que es del orden de $\sqrt{\lambda}$. Tenemos

$$N(\lambda) \geq \text{área}(E_\lambda) - C\sqrt{\lambda} = \frac{\lambda ab}{4\pi} - C\sqrt{\lambda} = \frac{\lambda\text{área}(\Omega)}{4\pi} - C\sqrt{\lambda}. \tag{1.9}$$

De (1.8) y (1.9) sigue que

$$\lambda_k\frac{\text{área}(\Omega)}{4\pi} - C\sqrt{\lambda_k} \leq k = N(\lambda_k) \leq \lambda_k\frac{\text{área}(\Omega)}{4\pi}$$

y finalmente obtenemos (1.7):

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_k}{k} = \frac{4\pi}{ab} = \frac{4\pi}{\text{área}(\Omega)}, \qquad i.e., \quad \lambda_k \sim \frac{4\pi k}{\text{área}(\Omega)} \qquad \text{cuando } k\to\infty.$$

1.3. **Caso general.** Veamos la prueba de (1.5) para el caso en que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado arbitrario.

En la prueba se utilizan algunos resutados de espacios de Sobolev que todavía no se han visto (podemos omitir la prueba por ahora).

Theorem 1.1. *Si Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{N(\lambda)}{\omega_n}\left(\frac{4\pi^2}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} = |\Omega|.$$

donde ω_n es el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Equivalentemente,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_k}{k^{2/n}} = \frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{2/n}}.$$

Remark 1.2. La prueba sigue utilizando el llamado "Dirichlet-Neumann bracketing": escribir Ω como una unión de cubitos de tamaño conveniente y usar el hecho de que conocemos como son asintóticamente los autovalores con condición de borde Dirichlet y Neumann sobre cubos.

Generalizando los cálculos efectuados en el caso del rectángulo en el plano, si $\Omega = [0,a_1]\times\cdots\times[0,a_n]$ es un parelelepípedo en $\mathbb{R}^n$ uno obtiene que los autovalores del problema de Dirichlet

$$-\Delta u = \lambda u \text{ en } \Omega, \qquad u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \tag{1.10}$$

y los del problema con condición de borde Neumann

$$-\Delta u = \mu u \text{ en } \Omega, \qquad u_\nu = 0 \text{ en } \partial\Omega, \tag{1.11}$$

(donde u_ν es la derivada normal de u sobre $\partial\Omega$) cumplen que

$$N_D(\lambda) = N_N(\lambda) = c_n\text{vol}(\Omega)\lambda^{\frac{n}{2}} + o(\lambda^{\frac{n}{2}}), \tag{1.12}$$

donde $N_D(\lambda)$ y $N_N(\lambda)$ son las funciones contadores de autovalores Dirichlet y Neumann, respectivamente, y c_n es una constante que depende solo de la dimensión n.

De la expresión anterior sigue que los autovalores de (1.10) y (1.11) se comportan asintóticamente como

$$\mu_k \sim \lambda_k \sim \left(\frac{k}{c_n \mathrm{vol}(\Omega)}\right)^{\frac{2}{n}} \qquad \text{cuando } k \to \infty.$$

Proof. Dividimos la prueba en dos pasos.

• Primero asumamos que Ω es una unión finita de cubos, $\Omega = \cup_{i\in I} Q_i$. Consideramos las sucesiones de autovalores con condiciones de borde Dirichlet y Neumann en los cubitos, $\{\lambda_k(Q_i)\}_{k,i}$ y $\{\mu_k(Q_i)\}_{k,i}$, y los ordenamos en dos sucesiones $\{\tilde\lambda_k\}_k$ y $\{\tilde\mu_k\}_k$ de manera de que $\tilde\lambda_1 \le \tilde\lambda_2 \le \dots$ y $\tilde\mu_1 \le \tilde\mu_2 \le \dots$.

Definimos los espacios

$$\tilde H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \colon u|_{Q_i} \in H_0^1(Q_i)\, \forall i\}, \qquad \tilde H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \colon u|_{Q_i} \in H^1(Q_i)\, \forall i\}.$$

Entonces valen las siguientes inclusiones

$$\tilde H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset \tilde H^1(\Omega) \subset \tilde H^1(\Omega).$$

La formulación variacional de los autovalores $\{\tilde\lambda_k\}_k$ y $\{\tilde\mu_k\}_k$ permite afirmar que

$$\tilde\mu_k \le \mu_k \le \lambda_k \le \tilde\lambda_k \implies N_{\tilde\lambda}(t) \le N_\lambda(t) \le N_\mu(t) \le N_{\tilde\mu}(t). \tag{1.13}$$

La estimación (1.12) nos da que

$$N_{\tilde\lambda}(t) = \sum_{i\in I} N_{\lambda,i}(t) = c_N t^{\frac{N}{2}} \sum_{i\in I} \mathrm{vol}(Q_i) + o(t^{\frac{N}{2}}) = c_N t^{\frac{N}{2}} \mathrm{vol}(\Omega) + o(t^{\frac{N}{2}}),$$

$$N_{\tilde\mu}(t) = \sum_{i\in I} N_{\mu,i}(t) = c_N \lambda^{\frac{N}{2}} \sum_{i\in I} \mathrm{vol}(Q_i) + o(\lambda^{\frac{N}{2}}) = c_N t^{\frac{N}{2}} \mathrm{vol}(\Omega) + o(t^{\frac{N}{2}}),$$

y así, junto con (1.13), obtenemos la fórmula asintótica para uniones finitas de rectángulos

$$c_N t^{\frac{N}{2}} \mathrm{vol}(\Omega) + o(t^{\frac{N}{2}}) \le N_\lambda(t) \le N_\mu(t) \le c_N t^{\frac{N}{2}} \mathrm{vol}(\Omega) + o(t^{\frac{N}{2}}).$$

• Ahora sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado cualquiera. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existen uniones finitas de rectángulos Ω_1 y Ω_2 tales que

$$\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2, \qquad \text{y} \qquad \mathrm{vol}(\Omega_2 \setminus \Omega_1) < \varepsilon.$$

La monotonía de los autovalores respecto al dominio nos da que

$$\lambda_n(\Omega_2) \le \lambda_n(\Omega) \le \lambda_n(\Omega_1) \implies N_{\lambda,\Omega_1}(t) \le N_{\lambda,\Omega}(t) \le N_{\lambda,\Omega_2}(t).$$

Entonces tenemos que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{N_{\lambda,\Omega}(t)}{t^{\frac{N}{2}}} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{N_{\lambda,\Omega_2}(t)}{t^{\frac{N}{2}}} = c_N \mathrm{vol}(\Omega_2) \le c_N(\mathrm{vol}(\Omega) + \varepsilon),$$

y

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{N_{\lambda,\Omega}(t)}{t^{\frac{N}{2}}} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{N_{\lambda,\Omega_1}(t)}{t^{\frac{N}{2}}} = c_N \mathrm{vol}(\Omega_1) \le c_N(\mathrm{vol}(\Omega) - \varepsilon).$$

Como ε es arbitrario, sigue que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_{\lambda,\Omega}(t)}{t^{\frac{N}{2}}} = c_N \mathrm{vol}(\Omega).$$

□

References

[1] Evans "Partial differential equations", 2nd Edition (2010) .
[2] Strauss "Partial Differential Equations: An Introduction". Wiley, 2nd Edition (2007)
[3] Sarah Pastorek "Weyl's asymptotic law".