Práctica 8: Diferenciación

"Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas."
Albert Einstein

"La inspiración es necesaria en geometría, tanto como en poesía."
Aleksandr Pushkin

Diferenciación

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que f' es acotada. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 2. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $(a, b) \setminus \{x_0\}$. Supongamos además que los límites laterales de f' en x_0 existen y son finitos. Probar que:

i) f es derivable lateralmente en x_0. Más aún, si ambos límites laterales coinciden, entonces f es derivable en x_0; determine $f'(x_0)$ en ese caso.

ii) Los resultados de la parte anterior dejan de ser válidos si se omite la hipótesis de continuidad de f en x_0.

Ejercicio 3. Sean $\alpha < a < b < \beta$ y $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función derivable en (α, β) tal que $f'(a) \neq f'(b)$. Probar que:

i) Si $f'(a) < 0 < f'(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $f'(a) < \lambda < f'(b)$, entonces existe $d \in (a, b)$ tal que $f'(d) = \lambda$.

iii) Si $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ está definida por

$$g(t) = \begin{cases} (t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}) & \text{si } 0 < t < 1, \\ (0, 0) & \text{si } -1 < t \leq 0, \end{cases}$$

entonces g es derivable en $(-1, 1)$ pero $g'((-1, 1))$ no es conexo.

Ejercicio 4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y sea $f : A \to \mathbb{R}^n$. Probar que si f es diferenciable en x_0, entonces existen $\delta > 0$ y $c \geq 0$ tales que $B(x_0, \delta) \subseteq A$ y $\|f(x) - f(x_0)\| \leq c\|x - x_0\|$ para todo $x \in B(x_0, \delta)$.

Ejercicio 5. Sean x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^n$ y sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene al segmento S que une x_1 y x_2. Mostrar que:

i) Si $f : A \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces existe x en el segmento S tal que $f(x_1) - f(x_2) = Df(x)(x_1 - x_2)$.

ii) Sin embargo, esto es falso para una función $f : A \to \mathbb{R}^m$.

iii) Si $f : A \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable tal que $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in A$, entonces $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$.

Ejercicio 6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y sea $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Probar que si $Df(x) = 0$ para todo $x \in A$, entonces f es constante en A.

Ejercicio 7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y sea $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$$

para cada par de puntos x, $y \in A$. Probar que f es constante.

Ejercicio 8. Probar que una función $f : A \to \mathbb{R}$ definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$ y con derivadas parciales acotadas es continua.

Teoremas de la Función Inversa y de la Función Implícita

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \mathrm{sen} \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Probar que $f'(0) = 1$ y f' es acotada en $(-1, 1)$, pero sin embargo f no es biyectiva en ningún entorno de 0. En particular, la continuidad de f' en el punto es necesaria en el teorema de la función inversa.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función tal que $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Probar que:

i) f no es inyectiva.

ii) El jacobiano de f es no nulo en todo punto de $\mathbb{R}^2$, de manera que f es localmente inyectiva.

Ejercicio 11. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 con jacobiano no nulo en todo U. Probar que:

i) f es abierta.

ii) Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $f^{-1}(y)$ es discreto en U.

Ejercicio 12. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $(1, 2, 0)$ es solución de la ecuación $F(xz, y-2x) = 0$.

i) Determinar condiciones suficientes para que existan un entorno $W \subseteq \mathbb{R}^2$ de $(1, 0)$ y una función $\phi : W \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que $\phi(1, 0) = 2$ y

$$F(xz, \phi(x, z) - 2x) = 0 \text{ para todo } (x, z) \in W.$$

ii) Mostrar que

$$x\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z) - z\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z) = 2x \text{ en } W.$$

Ejercicio 13. Mostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x - y^2 + z^3 = 0, \\ -\log(1 + x) + y^2 z = 1, \end{cases}$$

define dos funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en un entorno del punto $(0, 1, 1)$. Sean $C \subseteq \mathbb{R}^2$ la curva que define el sistema de ecuaciones considerado, dada en forma paramétrica por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$, y la función $g(x, y, z) = 2xyz + z \tan x$. Calcular la derivada direccional de g en $(0, 1, 1)$ según el vector tangente a α en el punto $x = 0$.