Práctica 7: Series de funciones y convergencia uniforme

Series en espacios normados

Ejercicio 1. Sea E un espacio normado, sean $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de E tales que las series $\sum_{n\geq 1} x_n$ y $\sum_{n\geq 1} y_n$ convergen, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$.

i) La serie $\sum_{n\geq 1}(x_n + y_n)$ converge a $\sum_{n\geq 1} x_n + \sum_{n\geq 1} y_n$.

ii) La serie $\sum_{n\geq 1} \lambda x_n$ converge a $\lambda \sum_{n\geq 1} x_n$.

Ejercicio 2. Sea B un espacio de Banach y sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en B tal que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente. Si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función biyectiva, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)}$ converge al mismo límite.

Convergencia uniforme

Ejercicio 3. Sea X un espacio métrico y sea A un conjunto. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $A \to X$ y sea $f : A \to X$. Entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ *no* converge uniformemente a f sobre A sii existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.

i) Encuentre el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones reales definidas sobre $A \subseteq \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $f_n(x) = x^n$, $A = (-1, 1]$;

b) $f_n(x) = x^{-n}\,\mathrm{e}^x$, $A = (1, +\infty)$;

c) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$, $A = [0, 1]$.

ii) Para la sucesión de a), pruebe que la convergencia es uniforme sobre $(0, \frac{1}{2})$, y para la de b), que es uniforme sobre $[2, 5]$.

iii) ¿Es uniforme la convergencia de la sucesión c) sobre A?

Ejercicio 5. Analice la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$:

i) $f_n(x) = n^{-1} \sin nx$, definida en $\mathbb{R}$;

ii) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$, definida en $\mathbb{R}$;

iii) $f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$, definida en $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$;

iv) $f_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x$, definidas en $[0, 1]$;

v) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0; \\ b + \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ y } (a,b) = 1; \end{cases}$ definidas en $[0,1]$.

vi) $f_n(z) = z^n$, definidas en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Ejercicio 6. Sea X un conjunto y sea $B(X)$ el conjunto de las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son acotadas. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

i) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{C}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

ii) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniforme a $f : X \to \mathbb{C}$, entonces $f \in B(X)$.

iii) La sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función acotada $f : X \to \mathbb{C}$ sii $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.

iv) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X, entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es *uniformemente acotada.*

Ejercicio 7. La sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, converge puntualmente pero no uniformemente a una función continua.

Ejercicio 8. Estudie la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(f'_n)_{n\geq 1}$ en $[0,1]$, con $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$.

Ejercicio 9. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas que converge uniformemente a una función $f : X \to \mathbb{R}$. Estudie la continuidad uniforme de f.

Ejercicio 10. Sea X un espacio métrico y sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de funciones $X \to \mathbb{R}$ que convergen uniformemente sobre X a f y a g, respectivamente.

i) La sucesión $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f + g$ sobre X.

ii) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a fg.

Ejercicio 11. Sea X un espacio métrico compacto y sea A un conjunto. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$, y si $(g_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función $g : A \to X$, entonces la sucesión $(f_n \circ g_n)_{n\geq 1}$ de funciones $A \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f \circ g$.

Ejercicio 12. *(Teorema de Dini)* Sea X un espacio métrico compacto y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ tales que

- $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, y

- $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{R}$ que es continua.

Entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f en X.

Ejercicio 13. Sea X un espacio métrico compacto, sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f sii para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X que converge la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ a $f(\operatorname{lím}_{n\to\infty} x_n)$.

Equicontinuidad

Ejercicio 14. Sean X e Y espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones $X \to Y$ es *equicontinua* en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F},\ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

i) Cualquier familia finita de funciones $X \to Y$ continuas en $x_0 \in X$ es equicontinua en x_0.

ii) Sea $B(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones $X \to Y$ que son acotadas. Si $\mathcal{F} \subseteq B(X, Y)$ es una familia equicontinua, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ también es equicontinua.

Supongamos desde ahora que X es compacto.

a) Si $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua de funciones $X \to Y$, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

b) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas $X \to Y$ que converge uniformemente en X, entonces $\{f_n : n \geq 1\}$ es una familia equicontinua.

c) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones $X \to Y$ uniformemente equicontinua que converge puntualmente a $f : X \to Y$, entonces esa convergencia es uniformemente en X.

Ejercicio 15. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $[a, b] \to \mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas y para cada $n \geq 1$ sea $F_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(x)\, dx$$

para cada $x \in [a, b]$. Entonces la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre $[a, b]$.

Series de funciones

Ejercicio 16. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en X.

i) La función suma $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en X.

ii) Si $X = [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\, dx$.

Ejercicio 17. *(Criterio de Weierstrass)* Sea X un espacio métrico, sea $(M_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{R}$ tales que $|f_n(x)| \leq M_n$ para cada $x \in X$ y cada $n \geq 1$. Si $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge, entonces $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en X.

Ejercicio 18. *(Función ζ de Riemann)* Consideramos la función dada por

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s},$$

para $s > 1$. Probar que para cada $\varepsilon > 0$ ζ converge uniformemente a una función continua sobre el intervalo $(1+\varepsilon, +\infty)$. Más aún, en ese intervalo resulta derivable y es posible derivarla término a término.

Ejercicio 19. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de escalares (reales o complejos) tal que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente, entonces las dos series de funciones $\sum_{n\geq 1} a_n \cos nx$ y $\sum_{n\geq 1} b_n \sin nx$ convergen absoluta y uniformente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 20.

i) Es $\sin x = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y la serie converge absoluta y uniformente en todo intervalo finito. ¿Qué sucede en $\mathbb{R}$?

ii) La función $f(x) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$ está bien definida en $\mathbb{R}$ y es allí continua.

Ejercicio 21. Si $x \in \mathbb{R}$, sea $f(x) = \sum_{n\geq 1} (1+n^2x^2)^{-1}$.

i) Determine el subconjunto de $\mathbb{R}$ sobre el cual esta definición tiene sentido.

ii) ¿Sobre qué intervalos es uniforme la convergencia?

iii) ¿Sobre qué intervalos *no* es uniforme la convergencia?

iv) ¿Es f continua en su dominio?

v) ¿Es f acotada?