Práctica 6: Espacios Normados

Ejercicio 1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado (sobre $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Probar que se verifican:

i) Las operaciones $+ : E \times E \to E$ y $\times : k \times E \to E$ son continuas.

ii) $\overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).

iii) $\operatorname{diam}(B_r(x)) = 2r$.

Ejercicio 2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$. Decimos que C es *convexo* si $\forall\ x, y \in C$ y $\forall\ t \in [0, 1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.

i) Probar que $B_r(x)$ es convexo.

ii) Probar que si $(C_i)_{i\in I}$ son convexos, entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ lo es.

iii) Probar que si C es convexo, entonces C° lo es.

iv) Probar que si C es convexo, entonces $\overline{C}$ lo es.

Ejercicio 3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

i) $\overline{S}$ también es un subespacio.

ii) Si $S \neq E$, entonces $S^o = \emptyset$.

iii) Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.

iv) Si S es un hiperplano (o sea: $\exists\ x \neq 0 \in E$ tal que $S \oplus \langle x \rangle = E$), entonces S es o bien denso o bien cerrado en E.

Ejercicio 4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(x_n) \subset E$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Ejercicio 5. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

i) $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ \exists \operatorname{lím}_{n\to\infty} x_n\} \subseteq \ell^\infty$.

ii) $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subseteq c$.

iii) $\{x \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subseteq \ell^1$.

iv) $\{x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subseteq \ell^2$.

v) $\mathbb{R}[X] \subseteq C[0, 1]$.

vi) $C^1[a, b] \subseteq C[a, b]$.

Ejercicio 6. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \to F$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

i) T es continuo en 0;

ii) existe $x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0;

iii) T es continuo;

iv) T es uniformemente continuo;

v) $\exists M > 0$ tal que $\forall x \in M \ : \|Tx\| \leq M\|x\|$ (T es *acotada*);

vi) $\forall A \subset E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 7. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Sea $L(E,F)$ el conjunto de operadores $T : E \to F$ lineales y continuos. Para para cada $T \ \in L(E,F)$ definimos

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Probar que:

i) $(L(E,F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

ii) Si F es de Banach entonces $L(E,F)$ también lo es.

Ejercicio 8. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \text{ínf}\{M : \|Tx\| \leq M\|x\|\}.$$

Ejercicio 9. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $K : C[0,1] \to C[0,1]$ dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy.$$

Probar que K es lineal y continua. Acotar su norma.

Ejercicio 10. En $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\geq 1} / \ \exists n_0, \ a_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}$ ponemos la norma infinito. Probar que la función $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f((a_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n,$$

es lineal pero no continua.

Ejercicio 11.

i) Sea $\phi \in C[0,1]$ y sea $T_\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

Probar que T_ϕ es un funcional lineal continuo y que $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$.

ii) Sea T: $c \to \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n\to\infty} a_n$. Probar que T es lineal y continuo y hallar $\|T\|$.

iii) Sea $1 \leq p \leq \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ el conjugado de p y sea $b \in \ell^{p'}$. Definimos $T_b : \ell^p \to \mathbb{R}$ según

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n.$$

Probar que T_b es lineal, continuo y hallar $\|T_b\|$.

Ejercicio 12. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $H \subset E$ un subespacio. Probar que H es un hiperplano si y sólo existe $\gamma : E \to \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$ lineal , $\gamma \neq 0$ tal que $H = Nu(\gamma)$. Probar que H es cerrado si y sólo si γ es continua.

Ejercicio 13. Sean E un espacio de Banach y $S,\ T$ subespacios cerrados, con $\dim T < \infty$. Probar que $S + T$ es cerrado.

Ejercicio 14. (Lema de Riesz) Sean E un espacio normado, $S \subset E$ un subespacio vectorial cerrado propio, y $0 < \alpha < 1$. Probar que existe $x_\alpha \in E - S$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|s - x_\alpha\| > \alpha\ \forall s \in S$. *Sugerencia:* considerar $x \notin S,\ r = d(x,S)$ y $x_\alpha = \frac{(x-b)}{\|x-b\|}$ con $b \in S$ adecuado.

Ejercicio 15. Sean E un espacio normado de dimensión infinita. Probar que existe $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\|\omega_n\| = 1$ y $d(\omega_n, \omega_m) > 1/2,\ n \neq m$. Deducir que $\overline{B_1(0)}$ no es compacta. *Sugerencia:* aplicar el lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita.

Ejercicio 16. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable.
Sugerencia: si la tuviera se escribiría como unión numerable de subespacios de dimensión finita. Usar el teorema de Baire.