

## PRÁCTICA 3: CONTINUIDAD, SEPARABILIDAD

*“Un especialista es un hombre o una mujer que ha decidido conseguir prominencia en un campo estrecho a expensas de un desarrollo equilibrado”*  
PAUL K. FEYERABEND, *Contra el método.*

## A. Continuidad

**Ejercicio 1.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos y sea  $f : X \rightarrow Y$ . Probar que:

- i)  $f$  es continua en  $x_0 \in X$  si y sólo si para toda sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ , la sucesión  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$  converge a  $f(x_0)$ .
- ii) Son equivalentes:
  1.  $f$  es continua;
  2. para todo  $G \subseteq Y$  abierto,  $f^{-1}(G)$  es abierto en  $X$ ;
  3. para todo  $F \subseteq Y$  cerrado,  $f^{-1}(F)$  es cerrado en  $X$ .

**Ejercicio 2.** Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

- i)  $f : (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}, | \cdot |)$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , donde  $d$  representa la métrica euclídea.
- ii)  $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ , la función identidad, donde  $\delta$  representa la métrica discreta.
- iii)  $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$ , la función identidad, donde  $\delta$  representa la métrica discreta.
- iv)  $i : (E, d) \rightarrow (X, d)$ , la inclusión, donde  $E \subseteq X$ .

**Ejercicio 3.** Sean  $f, g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \end{cases} \quad g(x) = x \cdot f(x); \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } (m : n) = 1, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que:

- i)  $f$  es discontinua en todo punto.
- ii)  $g$  sólo es continua en  $x = 0$ .
- iii)  $h$  es continua en  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 4.** Probar que un espacio métrico  $X$  es discreto si y sólo si toda función de  $X$  en un espacio métrico arbitrario es continua.

**Ejercicio 5.** (Métricas topológicamente equivalentes)

i) Supongamos que existen constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  tales que

$$d_1(x, y) \leq c_1 d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$$

para todo  $x, y \in X$ . Probar que  $d_1$  y  $d_2$  son topológicamente equivalentes.

ii) Probar que dos métricas  $d_1$  y  $d_2$  son topológicamente equivalentes si y sólo si la función identidad  $id_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$  es homeomorfismo.

iii) Probar que en  $\mathbb{R}^n$  todas las métricas  $d_p$  con  $1 \leq p \leq \infty$  son topológicamente equivalentes.

iv) Consideramos en  $\mathbb{R}$  la métrica

$$d'(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

Probar que es topológicamente equivalente a la métrica usual  $d(x, y) = |x - y|$ , pero que  $\mathbb{R}$  no es completo con la métrica  $d'$ .

**Ejercicio 6.** Considerando en cada  $\mathbb{R}^n$  la métrica euclídea, probar que:

i)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \operatorname{sen}(e^x - 1) = -2\}$  es cerrado.

ii)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$  es cerrado.

iii)  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$  es abierto.

Mencione otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

**Ejercicio 7.** Consideramos las funciones  $E, I : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

$$E(f) = f(0) \text{ e } I(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

i) Demostrar que si utilizamos en  $C([0, 1])$  la distancia  $d_\infty$  ambas resultan continuas.

ii) Demostrar que si en cambio utilizamos en  $C([0, 1])$  la distancia  $d_1$ ,  $I$  es una función continua pero  $E$  no lo es.

iii) Analizar si es posible que una función  $F : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  sea continua para la distancia  $d_1$  pero no para  $d_\infty$ .

**Ejercicio 8.** Sean  $X, Y$  espacios métricos y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Probar que el gráfico de  $f$ , definido por

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\},$$

es cerrado en  $X \times Y$  ¿Es cierta la afirmación recíproca?

**Ejercicio 9.** Sea  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  una función. **Analizar la validez** de las siguientes afirmaciones:

- i) Si  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ , con cada  $U_i$  abierto y  $f|_{U_i}$  continua para todo  $i \in I$ , entonces  $f : X \rightarrow Y$  es continua.
- ii) Si  $X = \bigcup_{i \in I} F_i$ , con cada  $F_i$  cerrado y  $f|_{F_i}$  continua para todo  $i \in I$ , entonces  $f : X \rightarrow Y$  es continua.
- iii) Si  $X = \bigcup_{i=1}^m F_i$ , con cada  $F_i$  cerrado y  $f|_{F_i}$  continua para cada  $i = 1, \dots, m$ , entonces  $f : X \rightarrow Y$  es continua.
- iv) Si  $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$  y  $f|_{X_i}$  continua para cada  $i = 1, \dots, m$ , entonces  $f : X \rightarrow Y$  es continua.

**Ejercicio 10.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Probar que  $f$  es continua si y sólo si para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , los conjuntos  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  y  $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$  son abiertos.

**Ejercicio 11.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $A$  un subconjunto de  $X$ . Probar que la función  $d_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$  es (uniformemente) continua.

**Ejercicio 12.** *Teorema de Urysohn.* Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sean  $A, B$  cerrados disjuntos de  $X$ .

- i) Probar que existe una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que:

$$f|_A \equiv 0, \quad f|_B \equiv 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X.$$

*Sugerencia:* Considerar la función  $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$ .

- ii) Deducir que existen abiertos  $U, V \subseteq X$  disjuntos tales que  $A \subseteq U$  y  $B \subseteq V$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  una función.

- i) Probar que  $f$  es continua ¿Sigue valiendo si  $f$  toma valores irracionales?
- ii) Suponiendo que  $f$  es biyectiva, ¿puede ser un homeomorfismo?

**Ejercicio 14.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y sea  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  la aplicación diagonal definida por  $\Delta(x) = (x, x)$ . Probar que:

- i)  $\Delta$  es un homeomorfismo entre  $X$  y  $\{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ .
- ii)  $\Delta(X)$  es cerrado en  $X \times X$ .

**Ejercicio 15.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos. Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  se dice *abierta* si  $f(A)$  es abierto para todo abierto  $A \subseteq X$  y se dice *cerrada* si  $f(F)$  es cerrado para todo cerrado  $F \subseteq X$ .

- i) Suponiendo que  $f$  es biyectiva, probar que  $f$  es abierta (cerrada) si y sólo si  $f^{-1}$  es continua.
- ii) Dar un ejemplo de una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  continua que no sea abierta.
- iii) Dar un ejemplo de una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  continua que no sea cerrada.
- iv) Mostrar con un ejemplo que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada pero no continua.

**Ejercicio 16.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función.

- i) Probar que  $f$  es continua si y sólo  $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$  para todo subconjunto  $E \subseteq X$ .  
Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.
- ii) Probar que  $f$  es continua y cerrada si y sólo si  $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$  para todo subconjunto  $E \subseteq X$ .

**Ejercicio 17.**

- i) Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos y sea  $D \subseteq X$  denso. Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  funciones continuas. Probar que si  $f|_D = g|_D$ , entonces  $f = g$ .
- ii) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{Q}$ . Probar que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \alpha x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 18.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos. Consideramos en  $X \times Y$  la métrica  $d_\infty$ .

- i) Probar que las proyecciones  $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$  y  $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$  son continuas y abiertas. Mostrar con un ejemplo que pueden no ser cerradas.
- ii) Sea  $(Z, \delta)$  un espacio métrico y sea  $f : Z \rightarrow X \times Y$  una aplicación. Probar que  $f$  es continua si y sólo si  $f_1 = \pi_1 \circ f$  y  $f_2 = \pi_2 \circ f$  lo son.

**Ejercicio 19.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $f$  es *semicontinua inferiormente* (resp. *superiormente*) en  $x_0 \in X$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies f(x_0) < f(x) + \varepsilon \quad (\text{resp. } f(x_0) + \varepsilon > f(x)).$$

Probar que:

- i)  $f$  es continua en  $x_0$  si y sólo si  $f$  es semicontinua inferiormente y superiormente en  $x_0$ .
- ii)  $f$  es semicontinua inferiormente si y sólo si  $f^{-1}(\alpha, +\infty)$  es abierto para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- iii)  $f$  es semicontinua superiormente si y sólo si  $f^{-1}(-\infty, \alpha)$  es abierto para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- iv) si  $A \subseteq X$  y  $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  es su función característica, entonces  $\chi_A$  es semicontinua inferiormente (resp. superiormente) si y sólo si  $A$  es abierto (resp. cerrado).

---

## B. Separabilidad

---

**Ejercicio 20.** Probar que  $\mathbb{R}^n$  (con la distancia euclídea) es separable.

**Ejercicio 21.** Sea  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \exists n_0 : a_n = 0 \forall n \geq n_0\}$ . Se considera la aplicación  $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d_\infty((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$ . Probar que  $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$  es un espacio métrico separable.

**Ejercicio 22.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se dice que una familia  $\mathcal{A} = (U_j)_{j \in J}$  de abiertos de  $X$  es una *base de abiertos de  $X$*  si todo abierto de  $X$  se puede escribir como unión de miembros de  $\mathcal{A}$ . Probar que  $\mathcal{A}$  es una base de abiertos de  $X$  si y sólo si verifica la siguiente condición: “Para todo abierto  $G$  de  $X$  y para todo  $x \in G$  existe  $j \in J$  tal que  $x \in U_j \subseteq G$ ”.

**Ejercicio 23.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico que verifica que cada cubrimiento abierto de  $X$  tiene un subcubrimiento numerable. Probar que  $X$  es separable.

**Ejercicio 24.** Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

**Ejercicio 25.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de  $X$  no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de  $X$  es a lo sumo numerable.

**Ejercicio 26.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos. Consideramos en  $X \times Y$  la métrica  $d_\infty$  definida por

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$

Probar que  $(X \times Y, d_\infty)$  es separable si y sólo si  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  son separables.

**Ejercicio 27.** ¿Es el espacio  $(\ell^\infty, d_\infty)$  separable?.

**Ejercicio 28.** Sean  $X, Y$  espacios métricos. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y suryectiva.

- i) Probar que si  $X$  es separable, entonces  $Y$  es separable.
- ii) ¿Es cierto que si  $X$  es completo entonces  $Y$  es completo?