Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre 2017

Segundo Parcial - 07/07/2017

Nombre y apellido: LU:

---

1. Sea $T : \ell^\infty \to \ell^{1*}$ el operador lineal definido por:

$$T(x)(y) = \sum_{n\geq 1} x_n y_n, \text{ para } x \in \ell^\infty, y \in \ell^1.$$

Probar que T es continuo y sobreyectivo.

2. Sean E un $\mathbb{R}$-espacio normado y $S \subseteq E$ un hiperplano cerrado. Probar que $E \setminus S$ tiene exactamente dos componentes conexas.

3. Sean X un espacio métrico compacto y $F \subseteq C(X, \mathbb{R})$. Supongamos que toda $f \in F$ alcanza su máximo en un único $x_f \in X$. Probar que la asignación $f \in F \mapsto x_f \in X$ es continua.

4. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^2$. Consideremos la aplicación $J : C[a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $J(f) := \int_a^b F(f(t))\, dt$. Probar que J es diferenciable y que su diferencial en $f \in C[a, b]$ está dado por

$$DJ(f)(h) = \int_a^b F'(f(t))h(t)\, dt. \text{ para } h \in C[a, b].$$

Sugerencia: Recuerde el Teorema de Taylor.

5. Sea X un espacio métrico compacto. Un *segmento* entre $x, y \in X$ es una función continua $g : [0, 1] \to X$ tal que

$$g(0) = x,\ g(1) = y,\ d(g(t), g(s)) = d(x, y)|t - s| \text{ , para todo } s, t \in [0, 1].$$

Supongamos que para cada par de puntos de X hay un **único** segmento que los une. Fijado $x_0 \in X$, definimos $\mathcal{H} : x \in X \mapsto g_x \in C([0, 1], X)$, donde g_x es el único segmento que une a x con x_0. Probar que $\mathcal{H}$ es continua.

Sugerencia: El teorema de Arzelá-Ascoli también vale para $C([0, 1], X)$.