Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre 2017

Primer Parcial - 16/05/2017

Nombre y apellido: LU:

---

1. Ana está intentando estudiar pero su hermano Beto quiere jugar con ella a toda costa. Para que no moleste, Ana va a elegir una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y un $n \in \mathbb{N}$ y pedirle que escriba en un cuaderno los números naturales $f(n), f^{(2)}(n) = f(f(n)), \ldots, f^{(k)}(n), \ldots$ hasta que aparezca n. Como no es infinitamente malvada, quiere darle una función y un número de manera que este proceso termine en finitos (al menos 2) pasos. ¿Cuántas funciones puede usar?

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Para $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo definimos la *oscilación* $\omega_f(I)$ de f en I por:
$$\omega_f(I) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in I\}.$$
Para cada $x \in \mathbb{R}$, la oscilación $\omega_f(x)$ de f en x se define por:
$$\omega_f(x) := \text{ínf}\{w_f((x - \delta, x + \delta)) : \delta > 0\}.$$
   a) Probar que f es continua en $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\omega_f(x) = 0$.
   b) Para $\lambda > 0$ consideramos el conjunto $A_\lambda := \{x \in \mathbb{R} : w_f(x) < \lambda\}$. Probar que A_λ es abierto cualquiera sea $\lambda > 0$. Deducir que el conjunto de puntos de continuidad de f es un G_δ.

3. Sea $C^1[0, 1]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones derivables en $[0, 1]$ con derivada continua, junto con la norma dada por $[f] := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$. Probar que el espacio métrico $(C^1[0, 1], [\cdot])$ es completo.

   Sugerencia: Tener presente el teorema fundamental del cálculo.

4. *a*) Probar que un espacio métrico X totalmente acotado[1] es separable. Mostrar que la recíproca no es cierta, incluso para X acotado.

   Desafío: Encontrar un contraejemplo en que X no tenga puntos aislados.

   b) Sea $A = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ el espacio de sucesiones de 0's y 1's dotado de la métrica
$$d(x, y) = \sum_{n\geq 1} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}, \text{ para } x, y \in A.$$
   Probar que A es separable.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es *quasi continua* en $x \in \mathbb{R}$ si dados $\varepsilon > 0, \delta > 0$, existen $z \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tales que:
   I) $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ siempre que $|z - y| < r$.
   II) $B_r(z) \subseteq B_\delta(x)$. (Notar que no necesariamente es $x \in B_r(z)$).

   Probar que si f es quasi continua en todo $x \in \mathbb{R}$, entonces es continua en un denso de $\mathbb{R}$.

   Sugerencia: Considerar los conjuntos $A_n := \{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) < \frac{1}{n}\}$.

---

[1] Recordar que X es totalmente acotado si dado $\varepsilon > 0$ existe un cubrimiento de X por finitas bolas abiertas de radio menor a ε.