Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre 2017

Segundo Parcial - 07/07/2017

Nombre y apellido: LU:

---

1. Sea $T : \ell^\infty \to \ell^{1*}$ el operador lineal definido por:

$$T(x)(y) = \sum_{n\geq 1} x_n y_n, \text{ para } x \in \ell^\infty, y \in \ell^1.$$

Probar que T es continuo y sobreyectivo.

Resolución. Mostremos en primer lugar que T es continuo. Sean $x \in \ell^\infty$, $y \in \ell^1$. Acotemos:

$$|T(x)(y)| \leq \sum_{n\geq 1} |x_n||y_n| \leq \|x\|_\infty \sum_{n\geq 1} |y_n| = \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

La arbitrariedad de $y \in \ell^1$ muestra que $\|T(x)\|_{\ell^{1*}} \leq \|x\|_\infty$ y en consecuencia T es acotado con norma a lo sumo 1. Para probar que T es sobreyectivo, tomemos $\varphi \in \ell^{1*}$ y notemos que si $y \in \ell^1$ vale $y = \sum_{n\geq 1} y_n e_n$ [1]. De la linealidad y la continuidad de φ se sigue que

$$\varphi(y) = \varphi\left(\sum_{n\geq 1} y_n e_n\right) = \varphi\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} y_n e_n\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} y_n \varphi(e_n).$$

Esto muestra que la serie $\sum_{n\geq 1} y_n \varphi(e_n)$ converge y su valor es

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} y_n \varphi(e_n) = \sum_{n\geq 1} y_n \varphi(e_n).$$

Por otro lado, notemos que $|\varphi(e_n)| \leq \|\varphi\| \|e_n\|_1 = \|\varphi\|$ y por lo tanto la sucesión $\varphi(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Por la definición del operador T resulta $T(\varphi(e_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \varphi$.

2. Sean E un $\mathbb{R}$-espacio normado y $S \subseteq E$ un hiperplano cerrado. Probar que $E \setminus S$ tiene exactamente dos componentes conexas.

Resolución. Un poco de experimentación revela que la manera más útil de trabajar con S es verlo como el núcleo de un funcional lineal continuo no nulo φ. Así, si ponemos

$$A := \{x \in E : \varphi(x) > 0\},\ B := \{x \in E : \varphi(x) < 0\}$$

resulta $E \setminus S = A \cup B$. Estos conjuntos son los candidatos naturales a ser las componentes conexas de $E \setminus S$. Como son abiertos y disjuntos, alcanza con ver que son conexos. Veamos que A es convexo (la prueba para B se sigue por simetría, tomando $-\varphi$ por ejemplo). Sean $x, y \in A$ y $t \in (0,1)$. Usando la linealidad de φ obtenemos

$$\varphi(tx + (1-t)y) = t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

Como cada sumando es evidentemente positivo, resulta $tx + (1-t)y \in A$ y en consecuencia todo el segmento entre x e y está contenido en A.

[1] Cuidado: el término de la derecha es un límite. La igualdad sólo tiene sentido en ℓ^1 con su norma.

3. Sean X un espacio métrico compacto y $F \subseteq C(X, \mathbb{R})$. Supongamos que toda $f \in F$ alcanza su máximo en un único $x_f \in X$. Probar que la asignación $f \in F \to x_f \in X$ es continua.

Resolución. Como es usual, para ver la continuidad de la asignación consideraremos una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ convergente a $f \in F$ y veremos que $(x_n := x_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a x_f. Nos topamos en principio con dos dificultades: probar en primer lugar que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y después que el límite es efectivamente x_f. Eliminemos por un momento la primera de ellas suponiendo que la sucesión converge a cierto $y \in X$. Como la convergencia $f_n \to f$ es uniforme, sabemos que

$$f_n(x_n) \to f(y).$$

Por otro lado, tenemos

$$f_n(x_n) \geq f_n(z) \text{ cualquiera sea } z \in X.$$

Tomando límite en esta desigualdad vemos que $f(y) \geq f(z)$ para cada $z \in X$, es decir, $y = x_f$. El ejercicio se reduce entonces a establecer la convergencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aquí entra en juego la compacidad. Si no fuera $x_n \to x$, podríamos encontrar una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $y \neq x$ (¡pensar esta afirmación!). Pero esto no puede pasar. Luego $x_n \to x$, lo que concluye el ejercicio.

4. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^2. Consideremos la aplicación $J : C[a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $J(f) := \int_a^b F(f(t))\, dt$. Probar que J es diferenciable con diferencial dada por

$$DJ(f)(h) = \int_a^b F'(f(t))h(t)\, dt, \text{ para } f, h \in C[a, b].$$

Sugerencia: Recuerde el Teorema de Taylor.

Resolución. Entendamos en primer lugar por qué es cierto lo pedido por el enunciado. El diferencial de J en una función $f \in C[a, b]$ es la transformación lineal $C[a, b] \to \mathbb{R}$ que mejor aproxima localmente a J a primer orden. Para entender cómo tiene que ser esta transformación tomemos un incremento $h \in C[a, b]$ y veamos a qué se parece la diferencia $J(f + h) - J(f)$. Usando el teorema de Taylor en cada $t \in [a, b]$, obtenemos

$$J(f + h) - J(f) = \int_a^b (F(f(t) + h(t)) - F(f(t)))\ dt = \int_a^b F'(f(t))h(t) + \frac{1}{2}\int_a^b R_{t,h},$$

donde $R_{t,h}$ es un resto que cumple $\frac{R_{t,h}}{h(t)} \to 0$ cuando $h(t) \to 0$. El término que queda proporcional a h en la última expresión es justamente el diferencial de J en f. La única dificultad del ejercicio radica en acotar para mostrar formalmente que la fórmula propuesta para $DJ(f)$ es correcta. Debemos mostrar que el cociente

$$\frac{|J(f + h) - J(f) - \int_a^b F'(f(t))h(t)\, dt|}{\|h\|_\infty}$$

tiende a 0 cuando $\|h\|_\infty$ va a 0. Si usamos la forma de Lagrange del resto, podemos acotar el numerador por

$$\frac{1}{2}\int_a^b |F''(\theta(t))||h^2(t)|\, dt,$$

donde $\theta(t)$ pertenece al intervalo determinado por $f(t)$ y $f(t)+h(t)$ para cada $t \in [a,b]$. Dado que podemos controlar la parte correspondiente a h^2 por $\|h\|_\infty^2$, lo único que resta hacer es mostrar que $\theta([a,b])$ es un conjunto acotado. Como $|\theta(t) - f(t)| \le |h(t)|$ para cada $t \in [a,b]$, tenemos

$$|\theta(t)| \le |\theta(t) - f(t)| + |f(t)| \le \|h\|_\infty + \|f\|_\infty.$$

De la continuidad de F'' deducimos que si $\|h\|_\infty \le 1$ existe un número $M > 0$ tal que $F''(\theta(t)) \le M$ cualquiera sea $t \in [a,b]$. Así,

$$\frac{|J(f+h) - J(f) - \int_a^b F'(f(t))h(t)\,dt|}{\|h\|_\infty} \le \frac{1}{2}\frac{\int_a^b |F''(\theta(t))h^2(t)|\,dt}{\|h\|_\infty} \le \frac{1}{2}\frac{(b-a)M\|h\|_\infty^2}{\|h\|_\infty},$$

lo que muestra que el límite del cociente incremental tiende a 0 si $\|h\|_\infty \to 0$.

5. Sea X un espacio métrico compacto. Un *segmento* entre $x, y \in X$ es una función continua $g : [0,1] \to X$ tal que

$$g(0) = x,\ g(1) = y,\ d(g(t), g(s)) = d(x,y)|t-s| \text{ , para todo } s,t \in [0,1].$$

Supongamos que entre cada par de puntos de X hay un **único** segmento. Fijado $x_0 \in X$, definimos $\mathcal{H} : x \in X \mapsto g_x \in C([0,1], X)$, donde g_x es el único segmento que une a x con x_0. Probar que $\mathcal{H}$ es continua.

Sugerencia: El teorema de Arzelá-Ascoli también vale para $C([0,1], X)$.

Resolución. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión que converge a $x \in X$. Debemos mostrar que $g_n := g_{x_n} \to g_x$. Veamos en primer lugar que si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cierta $g \in C([0,1], X)$ es $g = g_x$. Por la hipótesis de unicidad de segmentos, para hacer esto alcanza con verificar

$$g(1) = x_0,\ g(0) = x \text{ y } d(g(t), g(s)) = d(x, x_0)|t-s| \text{ (para } t, s \in [0,1]).$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ vale

$$g_n(1) = x_0,\ g_n(0) = x_n \text{ y } d(g_n(t), g_n(s)) = d(x_n, x_0)|t-s| \text{ (para } t, s \in [0,1]),$$

pasando al límite obtenemos las identidades que queríamos probar. Luego g_x es el único posible punto límite de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De forma análoga a lo hecho en clases, la estrategia para ver que en efecto $g_n \to g_x$ es probar y usar la compacidad del conjunto $\overline{\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$. Por Arzelá-Ascoli, este conjunto es compacto si y sólo si $\{g_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es precompacto en X para cada $t \in [0,1]$ y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinuo. Como X es compacto la primera condición se verifica trivialmente. Fijemos $s, t \in [0,1]$. Dado $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$|g_n(t) - g_n(s)| = d(x_n, x_0)|t-s| \le \operatorname{diam}(X)|t-s|,$$

de donde se sigue que el conjunto $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinuo. Luego, cada subsucesión de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Por lo antes dicho todas estas sucesiones convergen a g_x, lo que nos permite concluir que $g_n \to g_x$.