Espacios de funciones

Eugenio Borghini

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Durante la materia nos cruzamos con varios ejemplos de espacios métricos cuyos puntos son funciones. Ejemplos prototípicos:

Durante la materia nos cruzamos con varios ejemplos de espacios métricos cuyos puntos son funciones. Ejemplos prototípicos:

- $\mathcal{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R}$ acotadas$\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, donde X es un espacio métrico.

Durante la materia nos cruzamos con varios ejemplos de espacios métricos cuyos puntos son funciones. Ejemplos prototípicos:

- $\mathcal{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R}$ acotadas$\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, donde X es un espacio métrico.
- $C(X) := \{f : X \to \mathbb{R}$ continuas$\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, donde X es un espacio métrico compacto.

Durante la materia nos cruzamos con varios ejemplos de espacios métricos cuyos puntos son funciones. Ejemplos prototípicos:

- $\mathcal{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R}$ acotadas$\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, donde X es un espacio métrico.
- $C(X) := \{f : X \to \mathbb{R}$ continuas$\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, donde X es un espacio métrico compacto.
- $\ell_\infty := \{(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ acotadas$\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Durante la materia nos cruzamos con varios ejemplos de espacios métricos cuyos puntos son funciones. Ejemplos prototípicos:

- $\mathcal{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R}$ acotadas$\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, donde X es un espacio métrico.
- $C(X) := \{f : X \to \mathbb{R}$ continuas$\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, donde X es un espacio métrico compacto.
- $\ell_\infty := \{(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ acotadas$\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

En adelante trabajaremos con $\mathcal{B}(X) \cap C(X)$ con la norma infinito o con $C(X)$ para X compacto.

Propiedades métricas de espacios de funciones

Nuestro objetivo es ver cómo se comportan las propiedades vistas sobre espacios métricos generales (separabilidad, acotación, completitud, compacidad, conexión) y qué relación tienen con el espacio X. Varias de estas propiedades siempre se verifican para espacios de funciones.

Propiedades métricas de espacios de funciones

Nuestro objetivo es ver cómo se comportan las propiedades vistas sobre espacios métricos generales (separabilidad, acotación, completitud, compacidad, conexión) y qué relación tienen con el espacio X. Varias de estas propiedades siempre se verifican para espacios de funciones.

- $C(X)$ es completo.

Nuestro objetivo es ver cómo se comportan las propiedades vistas sobre espacios métricos generales (separabilidad, acotación, completitud, compacidad, conexión) y qué relación tienen con el espacio X. Varias de estas propiedades siempre se verifican para espacios de funciones.

- $C(X)$ es completo.
- $C(X)$ es convexo (pues es un espacio normado), y en particular es arcoconexo.

Propiedades métricas de espacios de funciones

Nuestro objetivo es ver cómo se comportan las propiedades vistas sobre espacios métricos generales (separabilidad, acotación, completitud, compacidad, conexión) y qué relación tienen con el espacio X. Varias de estas propiedades siempre se verifican para espacios de funciones.

- $C(X)$ es completo.
- $C(X)$ es convexo (pues es un espacio normado), y en particular es arcoconexo.
- $C(X)$ es separable por Stone-Weierstrass.

Convergencia de sucesiones

¿Cuándo una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una función f?

Convergencia de sucesiones

¿Cuándo una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una función f? Por la definición, $f_n \to f$ en $C(X)$ sii $f_n \rightrightarrows f$, es decir, si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$ y para *todo* $x \in X$.

¿Cuándo una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una función f?
Por la definición, $f_n \to f$ en $C(X)$ sii $f_n \rightrightarrows f$, es decir, si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$ y para *todo* $x \in X$.
En particular:

Convergencia de sucesiones

¿Cuándo una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una función f?
Por la definición, $f_n \to f$ en $C(X)$ sii $f_n \rightrightarrows f$, es decir, si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$ y para *todo* $x \in X$.
En particular:

- Si $f_n \rightrightarrows f$, entonces f es continua.

¿Cuándo una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una función f?
Por la definición, $f_n \to f$ en $C(X)$ sii $f_n \rightrightarrows f$, es decir, si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$ y para *todo* $x \in X$.
En particular:

- Si $f_n \rightrightarrows f$, entonces f es continua.
- Si $f_n \to f$, para cada $x \in X$ es

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Convergencia de sucesiones

¿Cuándo una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una función f?
Por la definición, $f_n \to f$ en $C(X)$ sii $f_n \rightrightarrows f$, es decir, si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$ y para *todo* $x \in X$.
En particular:

- Si $f_n \rightrightarrows f$, entonces f es continua.
- Si $f_n \to f$, para cada $x \in X$ es

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

¡La vuelta no vale! Pensar $X = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$, $f = \chi_{\{1\}}$.

Ejemplo

Sea $X = [-1, 1]$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$. *¿Converge la sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*?*

Ejemplo

Sea $X = [-1, 1]$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$. *¿Converge la sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*?*

Resolución

Por Taylor, sabemos que para cada $x \in [-1, 1]$ $f_n(x) \to \mathrm{e}^x$. Así que si la sucesión converge, debe ser a la función exponencial. Acotemos la diferencia para un punto $x_0 \in [-1, 1]$.

Convergencia de sucesiones

Ejemplo

Sea $X = [-1, 1]$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$. *¿Converge la sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*?*

Resolución

Por Taylor, sabemos que para cada $x \in [-1, 1]$ $f_n(x) \to \mathrm{e}^x$. Así que si la sucesión converge, debe ser a la función exponencial. Acotemos la diferencia para un punto $x_0 \in [-1, 1]$.

$$|f_n(x_0) - \mathrm{e}^{x_0}| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{x_0^k}{k!} - \sum_{k\geq 1} \frac{x_0^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k>n} \frac{x_0^k}{k!} \right| \leq \sum_{k>n} \left| \frac{x_0^k}{k!} \right| \leq \sum_{k>n} \frac{1}{k!}.$$

Resolución

(Continuación) Como $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $\sum_{k>n} \frac{1}{k!} < \varepsilon$. Luego, vemos que f_n converge a la función exponencial sobre $[-1, 1]$.

Resolución

(Continuación) Como $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $\sum_{k>n} \frac{1}{k!} < \varepsilon$. Luego, vemos que f_n converge a la función exponencial sobre $[-1, 1]$.

Ejemplo

Sea $X = [-r, r]$ *donde* $r \in (0, 1)$. *Analice la convergencia de la sucesión*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(x^k).$$

Resolución

Ahora no tenemos un candidato conocido a límite. Sabemos que para cada $x \in [-r, r]$,

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\sin(x^k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |x^k| \leq \sum_{k \geq 1} r^k = \frac{r}{1-r},$$

así que el límite puntual de $f_n(x)$ existe.

Resolución

Ahora no tenemos un candidato conocido a límite. Sabemos que para cada $x \in [-r, r]$,

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\sin(x^k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |x^k| \leq \sum_{k \geq 1} r^k = \frac{r}{1-r},$$

así que el límite puntual de $f_n(x)$ existe. ¿Cómo hacemos para probar que una sucesión converge sin conocer el límite?

Resolución

Ahora no tenemos un candidato conocido a límite. Sabemos que para cada $x \in [-r, r]$,

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\sin(x^k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |x^k| \leq \sum_{k \geq 1} r^k = \frac{r}{1-r},$$

así que el límite puntual de $f_n(x)$ existe. ¿Cómo hacemos para probar que una sucesión converge sin conocer el límite?

¡Usamos completitud y Cauchy!

Convergencia de sucesiones

Cauchy

Una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy sii dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0$ implica $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq n_0$, para todo $x \in X$.

Cauchy

Una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy sii dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0$ implica $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq n_0$, para todo $x \in X$.
Con gusto dudoso, una sucesión que cumple esto se dice *uniformemente de Cauchy*.

Cauchy

Una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy sii dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0$ implica $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq n_0$, para todo $x \in X$.

Con gusto dudoso, una sucesión que cumple esto se dice *uniformemente de Cauchy*.

Resolución

(Continuación) Veamos que f_n es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} r^k \leq \frac{r^{m+1}}{1-r},$$

que es menor a ε si m es suficientemente grande.

Sea $H \subseteq C(X)$. H es acotado si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$, $f \in H$ (a veces esto se llama equiacotado).

Sea $H \subseteq C(X)$. H es acotado si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$, $f \in H$ (a veces esto se llama equiacotado).
H se dice *equicontinuo* en $x_0 \in X$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ para toda } f \in H$$

siempre que $|x - x_0| < \delta$.
H se dice equicontinuo si lo es en todos sus puntos.

Ejemplo

Todo conjunto finito es equicontinuo.

¿Qué dice el Teorema de Arzelá-Ascoli?

Teorema de Arzelá-Ascoli

¿Qué dice el Teorema de Arzelá-Ascoli?

Importante

El Teorema de Arzelá- Ascoli caracteriza los compactos de $C(X)$.

¿Qué dice el Teorema de Arzelá-Ascoli?

Importante

El Teorema de Arzelá- Ascoli caracteriza los compactos de $C(X)$.

Teorema

Sean X compacto, $H \subseteq C(X)$. Entonces H es relativamente compacto sii es acotado y equicontinuo.

Teorema de Arzelá-Ascoli

¿Qué dice el Teorema de Arzelá-Ascoli?

Importante

El Teorema de Arzelá- Ascoli caracteriza los compactos de $C(X)$.

Teorema

Sean X compacto, $H \subseteq C(X)$. Entonces H es relativamente compacto sii es acotado y equicontinuo.

Veamos algunas aplicaciones.

Ejemplo

Sea $X = [a,b]$. *Para* $M > 0$, *definimos:*

$$\begin{aligned} Lip_M[a,b] &:= \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \ |f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \, \forall x, y \in [a,b]\} \\ \mathcal{H}[a,b] &:= \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \ f(a) = 0\}. \end{aligned}$$

Mostrar que $Lip_M^0[a,b] := Lip_M[a,b] \cap \mathcal{H}[a,b]$ *es compacto.*

Ejemplo

Sea $X = [a,b]$. *Para* $M > 0$, *definimos:*

$$Lip_M[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \, \forall x,y \in [a,b]\}$$
$$\mathcal{H}[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f(a) = 0\}.$$

Mostrar que $Lip_M^0[a,b] := Lip_M[a,b] \cap \mathcal{H}[a,b]$ *es compacto.*

Resolución

Como $Lip_M^0[a,b]$ es cerrado en $C([a,b])$, por el Teorema de Arzelá-Ascoli, alcanza con ver que es acotado y equicontinuo.

Ejemplo

Sea $X = [a,b]$. *Para* $M > 0$, *definimos:*

$$Lip_M[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \, \forall x, y \in [a,b]\}$$
$$\mathcal{H}[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f(a) = 0\}.$$

Mostrar que $Lip_M^0[a,b] := Lip_M[a,b] \cap \mathcal{H}[a,b]$ *es compacto.*

Resolución

Como $Lip_M^0[a,b]$ es cerrado en $C([a,b])$, por el Teorema de Arzelá-Ascoli, alcanza con ver que es acotado y equicontinuo.

- $Lip_M^0[a,b]$ es acotado porque toda función esta acotada por $M(b-a)$.

Teorema de Arzelá-Ascoli

Resolución

(Continuación)

Resolución

(Continuación)

- Veamos que $Lip^0_M[a,b]$ es equicontinuo. Sean $\varepsilon > 0$, $f \in Lip^0_M[a,b]$ y $x_0 \in [a,b]$.
$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| < \varepsilon$$
si $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Algún tiempo atrás...

Algún tiempo atrás...

Ejemplo

Probar que las normas $\|\cdot\|_\infty$ *y* $\|\cdot\|_1$ *son equivalentes sobre* $Lip_M^0[a,b]$.

Teorema de Arzelá-Ascoli

Algún tiempo atrás...

Ejemplo

Probar que las normas $\|\cdot\|_\infty$ *y* $\|\cdot\|_1$ *son equivalentes sobre* $Lip_M^0[a,b]$.

Resolución

Como $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$, alcanza con probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Lip_M^0[a,b]$ es tal que $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} f$, entonces $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f$.

Teorema de Arzelá-Ascoli

Algún tiempo atrás...

Ejemplo

Probar que las normas $\|\cdot\|_\infty$ *y* $\|\cdot\|_1$ *son equivalentes sobre* $Lip_M^0[a,b]$.

Resolución

Como $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$, alcanza con probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Lip_M^0[a,b]$ es tal que $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} f$, entonces $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f$.

Si fuera $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} g$, tendríamos $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} g$ y luego $g = f$.

Teorema de Arzelá-Ascoli

Algún tiempo atrás...

Ejemplo

Probar que las normas $\|\cdot\|_\infty$ *y* $\|\cdot\|_1$ *son equivalentes sobre* $Lip^0_M[a,b]$.

Resolución

Como $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$, alcanza con probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Lip^0_M[a,b]$ es tal que $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} f$, entonces $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f$.

Si fuera $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} g$, tendríamos $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} g$ y luego $g = f$.

Como $Lip^0_M[a,b]$ es compacto, f_n tiene alguna subsucesión convergente a $g \in Lip^0_M[a,b]$.

Teorema de Arzelá-Ascoli

Estamos cerca pero nos falta algo.

Estamos cerca pero nos falta algo.

Ejercicio importante de la guía

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico X. Entonces x_n converge a x sii toda subsucesión de x_n posee una subsucesión que converge a x.

Estamos cerca pero nos falta algo.

Ejercicio importante de la guía

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico X. Entonces x_n converge a x sii toda subsucesión de x_n posee una subsucesión que converge a x.

Ahora sí:

Resolución

(Continuación) Sea $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión. Por compacidad podemos extraer una subsucesión convergente a $g \in Lip^0_M[a,b]$. Por lo visto antes, debe ser $f = g$ y luego $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f$, como queríamos mostrar.