Práctica 8: Medidas abstractas

Ejercicio 1. Probar que las siguientes ternas $(X, \mathcal{A}, \mu)$ constituyen espacios de medida. En cada caso encontrar los conjuntos de medida nula y caracterizar $\int_X f(x)d\mu(x)$.

(a) **Medida de contar.** Dado un conjunto X tomamos $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, y para cada $E \in \mathcal{A}$ definimos

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E, & \text{si } E \text{ es finito,} \\ +\infty, & \text{si } E \text{ es infinito.} \end{cases}$$

(b) **Medida de contar pesada.** Dada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos (denominados pesos), tomamos $X = \mathbb{N}$ con $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y definimos para cada $E \in \mathcal{A}$

$$\mu(E) := \sum_{n\in E} a_n.$$

(c) **Medida de Dirac concentrada en x_0.** Dado un conjunto X no vacío y $x_0 \in X$ tomamos $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ y para cada $E \in \mathcal{A}$ definimos

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_0 \in E, \\ 0, & \text{si } x_0 \notin E. \end{cases}$$

La medida μ se denomina la medida delta de Dirac concentrada en x_0 y se nota δ_{x_0}.

(d) **Medida de Lebesgue pesada.** Tomamos $X = \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{A}$ la sigma-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue y dada una función medible $\omega : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ (denominada peso) definimos para cada $E \in \mathcal{A}$

$$\mu(E) := \int_E \omega(x)dx.$$

Ejercicio 2. Probar que toda medida μ definida sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ es una medida de contar pesada para alguna elección adecuada de pesos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio 3. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \Sigma$, $Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

(b) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.

Ejercicio 4. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una aplicación tal que:

(i) Si $A, B \in \mathcal{A}$ son disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ y $A_n \searrow \emptyset$, entonces $\lim_n \mu(A_n) = 0$.

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 5. (Pushforward de una medida). Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y μ una medida (no negativa) y finita sobre X. Sea $F : X \to \mathbb{R}^n$ una función medible. Probar que la fórmula,

$$\mu_F(E) := \mu(F^{-1}(E)),$$

define una medida sobre la sigma-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ tal que para toda función Borel medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no negativa vale que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_F = \int_X f \circ F d\mu.$$

Concluir que una función Borel medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable para μ_F si y sólo si $f \circ F$ es integrable para μ y que, en este caso, $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_F = \int_X f \circ F d\mu$.

Ejercicio 6. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible con μ una medida positiva y finita. Sean $f \in L^1(X, \mu)$ y $S \subseteq \mathbb{C}$ cerrado tal que $\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$ para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) > 0$. Probar que $f(x) \in S$, para casi todo x (respecto de μ).

Ejercicio 7. Sean $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida con signo y $A, B \in \mathcal{A}$ respectivamente un conjunto positivo y negativo para ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Dado $E \in \mathcal{A}$ demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{A}\}$,

(b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \text{ínf}\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{A}\}$.

Ejercicio 8. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, f una función $\mu-$integrable y ν la medida sobre $(X, \mathcal{A})$ definida para cada $E \in \mathcal{A}$ por la fórmula

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x).$$

Dado $E \in \mathcal{A}$ demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\nu^+(E) = \int_E f^+(x) d\mu(x)$,

(b) $\nu^-(E) = \int_E f^-(x) d\mu(x)$.

Ejercicio 9. Sean λ y μ medidas sobre (X, Σ) con $\lambda(X) < +\infty$.

(a) Probar que si $\lambda \ll \mu$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $E \in \mathcal{A}$

$$\mu(E) < \delta \;\Rightarrow\; \lambda(E) < \varepsilon.$$

(b) Mostrar que sin la hipótesis $\lambda(X) < +\infty$ la afirmación en (a) puede ser falsa.

Ejercicio 10. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X.

(a) Probar que si definimos la aplicación $\mu_f \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ para cada $B \in \mathcal{F}$ por la fórmula

$$\mu_f(B) = \int_B f(x)d\mu(x)$$

entonces μ_f es una medida con signo sobre el espacio $(X, \mathcal{F})$ que satisface $\mu_f \ll \mu$. Deducir que existe una función $g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que para todo $B \in \mathcal{F}$

$$\int_B f(x)d\mu(x) = \int_B g(x)d\mu(x).$$

(b) Determinar la función g del inciso anterior si $\mathcal{F} = \{\emptyset, B, B^c, X\}$ para algún $B \in \mathcal{A}$.

Ejercicio 11. Decidir si $\lambda \ll \mu$ en cada uno de los siguientes casos y hallar la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\lambda}{d\mu}$ cuando corresponda.

(a) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} =$ sigma-álgebra de Lebesgue, $\mu =$ medida de Lebesgue y $\lambda = \delta$.

(b) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} =$ sigma-álgebra de Lebesgue, $\lambda =$ medida de Lebesgue y $\mu =$ medida de contar. ¿Contradicen sus conclusiones el Teorema de Radon Nikodym?

(c) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\lambda =$ medida de contar, $\mu =$ medida de contar con pesos $a_n = 2^{-n}$.

Ejercicio 12. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y ν una medida con signo sobre $(X, \mathcal{A})$ tal que $\nu \ll \mu$.

(a) Probar que existe una función $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que para toda $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \nu)$

$$\int_X f(x)d\nu(x) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x).$$

(b) Probar que $\{x \in X : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in X : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν.

Ejercicio 13. Dada μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$ definimos $F_\mu \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ por la fórmula

$$F(x) = \mu((-\infty, x]).$$

(a) Probar que F es monótona creciente, continua a derecha, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \mu(\mathbb{R})$ y $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

(b) Probar que μ es absolutamente continua respecto de $\mathcal{L}$: la medida de Lebesgue unidimensional si y sólo si F es una función absolutamente continua. Mostrar además que en tal caso se tiene

$$\frac{d\mu}{d\mathcal{L}} = F'.$$

(c) Probar que μ es singular respecto $\mathcal{L}$ si y sólo si $F' = 0$ c.t.p. con respecto a $\mathcal{L}$. *Sugerencia*: Considerar un argumento similar al usado para probar que las funciones monótonas son derivables en casi todo punto.

Ejercicio 14. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Notamos con $\mathcal{H}^\alpha$ la medida de Hausdorff $\alpha-$dimensional.

(a) Probar que $\mathcal{H}^\alpha(E + x) = \mathcal{H}^\alpha(E)$ $\forall E$ medible, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Probar que $\mathcal{H}^\alpha(cE) = c^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E)$ $\forall E$ medible, $\forall c > 0$.

(c) Probar que si $\mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$ $\forall \beta > \alpha$.

(d) Probar que si $0 < \mathcal{H}^\alpha(E) \leq \infty$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = \infty$ $\forall \beta < \alpha$.

Ejercicio 15. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la *dimensión* de E como

$$\dim(E) = \sup\{\alpha\colon \mathcal{H}^\alpha(E) = \infty\} = \text{ínf}\{\alpha\colon \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\}.$$

(a) Probar que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$ $\forall \alpha > \dim(E)$.

(b) Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$. Probar que si $\dim(E_n) = d$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\dim(\sup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = d$. Concluir que si E es numerable, entonces $\dim(E) = 0$.

(c) Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación bi-Lipschitz, es decir, existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1\|x-y\| \leq \||f(x) - f(y)\| \leq C_2\|x-y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Probar que $\dim(E) = \dim(f(E))$.

Ejercicio 16. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $X = \sum_{n=1}^k a_n A_n$ una variable aleatoria simple, donde los números reales a_n son todos distintos, los conjuntos A_n son disjuntos dos a dos y $\Omega = \cup_{n=1}^k A_n$. Sea $\mathcal{U}(X) = \{X^{-1}(B)\colon B \text{ boleriano }\}$ la $\sigma-$álgebra generada por X.

(a) Describir precisamente los conjuntos que componen $\mathcal{U}(X)$.

(b) Probar que si una variable aleatoria Y es $\mathcal{U}(X)-$medible, entonces Y es constante en cada uno de los conjuntos A_n.

(c) Mostrar que entonces Y puede ser escrita en función de X.

Ejercicio 17.

(a) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{A}-$medible. Consideramos la medida μ_X en los borelianos de $\mathbb{R}$ definida por $\mu_X(A) = \mu(X^{-1}(A))$. Probar que para toda función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μ_X-integrable, vale que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_X = \int_\Omega f(X) d\mu.$$

(b) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $X\colon \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ una función $\mathcal{A}-$medible con $\int_\Omega f dP = 1$. Definimos una medida ν sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ por

$$\nu(A) = \int_A f dP.$$

Probar que $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ es una espacio de probabilidad y que para toda $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ $\nu-$integrable vale que

$$\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega g f dP.$$

(c) En particular, sea $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria y sea f la función densidad de X. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos que $Y = g(X)$ es integrable. Probar que

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} g f.$$