1 Análisis Multivariado I - Práctica 0

1.1 Repaso de Álgebra Lineal

1. Probar que $tr\,(A+B) = tr\,(A) + tr\,(B)$ y $tr\,(AB) = tr\,(BA)$.

2. Mostrar que los autovalores no nulos de AB coinciden con los de BA. (Si las matrices son cuadradas, los nulos también coinciden).

3. Sea A una matriz simétrica de $d \times d$.

   (a) Probar que todos sus autovalores son reales. Si llamamos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_d$ a estos autovalores, mostrar que:

   - $tr\,(A) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$
   - $|A| = \prod_{i=1}^{d} \lambda_i$
   - $|I \pm A| = \prod_{i=1}^{d} (1 \pm \lambda_i)$

   (b) $A \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \ \ \forall i$.

   (c) $A > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \ \ \forall i$.

   (d) $A \geq 0$ y $|A| \neq 0 \Rightarrow A > 0$.

   (e) $A > 0 \Rightarrow A^{-1} > 0$.

   (f) $A > 0 \Leftrightarrow$ existe $R \in \mathbb{R}^{d\times d}$ no singular tal que $A = RR^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow$ existe una matriz ortogonal $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ tal que si $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ con $\lambda_i > 0 \quad \forall i$ entonces $A = B\Lambda B^{\mathrm{T}}$ (es lo que se denomina *descomposición espectral* de A).

   (g) $A \geq 0$ de rango $r \Leftrightarrow$ existe $R \in \mathbb{R}^{d\times d}$ de rango r tal que $A = RR^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow$ existe una matriz ortogonal $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ tal que si $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ con $\lambda_i \geq 0\ \forall i$ entonces $A = B\Lambda B^{\mathrm{T}}$.

4. Una matriz P de $d \times d$ se dice *de proyección* si es simétrica e idempotente (es decir, $P^2 = P$). Probar que:

   (a) $rg\,(P) = r \Leftrightarrow \lambda_i = 1$ para $i = 1, \ldots, r$ y $\lambda_i = 0$ para $i = r+1, \ldots, d$. Entonces $P = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{t}_i \mathbf{t}_i^{\mathrm{T}}$ para ciertos $\mathbf{t}_i$ ortonormales. ¿Cómo queda la descomposición espectral en este caso?

   (b) $rg\,(P) = tr\,(P)$.

   (c) $I - P$ también es de proyección. ¿Qué rango tiene?¿Sobre qué espacio proyecta?

5. Sea X de $n \times p$ y de rango p. Mostrar que $P = X\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}$ es una matriz de proyección. ¿Sobre qué espacio proyecta?

1.2 Esperanza, varianza y covarianza de vectores aleatorios

1. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores aleatorios (no necesariamente de la misma dimensión) probar que:

   (a) $\text{Cov}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbb{E}(\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}) - \mathbb{E}(\mathbf{x})\,\mathbb{E}(\mathbf{y}^{\mathrm{T}})$.

   (b) $\text{Cov}(A\mathbf{x}, B\mathbf{y}) = A\text{Cov}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,B^{\mathrm{T}}$.

   (c) Si $\mathbf{a}$ es un vector no aleatorio, $\text{Var}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \text{Var}(\mathbf{x})$.

   (d) $\text{Var}(A\mathbf{x}) = A\text{Var}(\mathbf{x})\,A^{\mathrm{T}}$.

2. Sea $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ una muestra de vectores aleatorios de dimensión d (m.a.) con dispersión Σ y $\{a_i\}_{1\le i\le n}, \{b_i\}_{1\le i\le n}$ escalares no aleatorios. Mostrar que:

   (a) $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\Sigma$.

   (b) $\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i, \sum_{j=1}^{n} b_j\mathbf{x}_j\right) = \mathbf{O} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$.

3. Si $\mathbf{x} \sim (\mu, \Sigma)$ y A es simétrica, probar que $\mathbb{E}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}) = tr(A\Sigma) + \mu^{\mathrm{T}}A\mu$.

4. Sea $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ una m.a. (μ,Σ). Mostrar que:

   (a) $\mathbb{E}(\bar{\mathbf{x}}) = \mu$ y $\text{Var}(\bar{\mathbf{x}}) = \Sigma/n$.

   (b) $\mathbb{E}(Q) = (n-1)\,\Sigma, \quad \text{con } Q = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$