

Inferencia para la normal multivariada

Graciela Boente

Propiedad

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i.i.d., $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_j \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma} > 0$

- La familia $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ es una familia exponencial.

Propiedad

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i.i.d., $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma} > 0$

- La familia $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ es una familia exponencial.
- $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T$ y $\bar{\mathbf{x}}$ son estadísticos suficientes y completos.

Propiedad

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i.i.d., $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma} > 0$

- La familia $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ es una familia exponencial.
- $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T$ y $\bar{\mathbf{x}}$ son estadísticos suficientes y completos.
- Por lo tanto, cualquier estimador insesgado basado en \mathbf{Q} y $\bar{\mathbf{x}}$ resulta IMVU.

Propiedad

- Los estimadores de máxima verosimilitud de μ y Σ son $\hat{\mu} = \bar{x}$ y $\hat{\Sigma} = \mathbf{Q}/n$. Además si

$$L(\mu, \Sigma) = \prod_{j=1}^n f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_j, \mu, \Sigma)$$

tenemos que

$$L(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} \left(\det(\hat{\Sigma}) \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{np}{2}}$$

Propiedad

- Los estimadores de máxima verosimilitud de μ y Σ son $\hat{\mu} = \bar{\mathbf{x}}$ y $\hat{\Sigma} = \mathbf{Q}/n$. Además si

$$L(\mu, \Sigma) = \prod_{j=1}^n f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_j, \mu, \Sigma)$$

tenemos que

$$L(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} \left(\det(\hat{\Sigma}) \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{np}{2}}$$

- $\mathbb{E}(\bar{\mathbf{x}}) = \mu$

$$\mathbb{E}(\hat{\Sigma}) = \frac{n-1}{n} \Sigma$$

luego el estimador insesgado de Σ es

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{Q}}{n-1}$$

Distribución de los estimadores

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i.i.d., $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma} > 0$ y $n \geq p + 1$

a) $\bar{\mathbf{x}} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, (1/n)\boldsymbol{\Sigma})$,

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \sim \mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}, p, n - 1) .$$

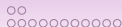
b) $\bar{\mathbf{x}}$ y \mathbf{Q} son independientes.

c)

$$T^2 = n(n-1) (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{Q}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) = n (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \sim T_{p, n-1}^2$$

o sea,

$$\frac{n-p}{p} \frac{T^2}{n-1} \sim \mathcal{F}_{p, n-p}$$



Una muestra

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i.i.d., $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_j \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma} > 0$

Un test de nivel α para

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$$

$$H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$$

está dado por

$$\Phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) > \chi_{p,\alpha}^2 \\ 0 & \text{si } n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) \leq \chi_{p,\alpha}^2 \end{cases}$$



Dos muestras

Sean $\Sigma > 0$

- $\mathbf{x}_{1,1}, \dots, \mathbf{x}_{1,n_1}$ i.i.d., $\mathbf{x}_{1,j} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_{1,j} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma)$
- $\mathbf{x}_{2,1}, \dots, \mathbf{x}_{2,n_2}$ i.i.d., $\mathbf{x}_{2,j} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_{2,j} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma)$
- Supongamos que ambas muestras son independientes entre sí

Definamos

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \mathbf{x}_{1,j} \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \mathbf{x}_{2,j}$$

Un test de nivel α para

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$$

$$H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$$

está dado por

$$\Phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) > \chi_{p,\alpha}^2 \\ 0 & \text{si } \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \leq \chi_{p,\alpha}^2 \end{cases}$$

Teorema

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i.i.d., $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma} > 0$

$$T_0^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

a) Sea $\lambda^2 = n(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)$ luego

$$\frac{n-p}{p} \frac{T_0^2}{n-1} \sim \mathcal{F}_{p, n-p}(\lambda^2)$$

b) Una región de confianza para $\boldsymbol{\mu}$ de nivel $1 - \alpha$ está dada por

$$\left\{ \boldsymbol{\mu} : n \frac{n-p}{p(n-1)} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \leq f_{p, n-p}(\alpha) \right\}$$

donde $f_{p, m}(\alpha)$ es tal que $\mathbb{P}(\mathcal{F}_{p, m} > f_{p, m}(\alpha)) = \alpha$.

c) El test de máxima verosimilitud para

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

está dado por

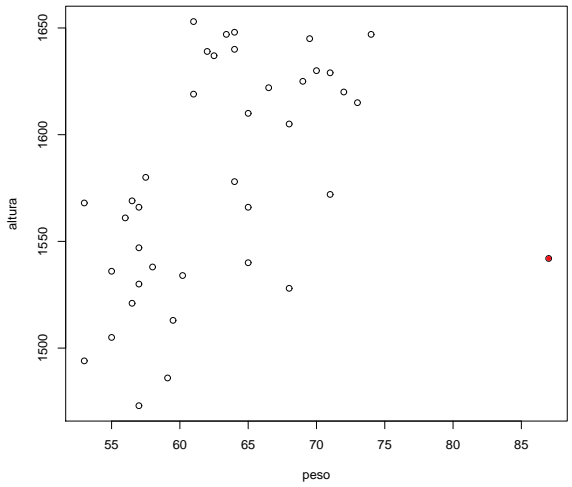
$$\Phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_0^2 > t_{p,n-1}^2(\alpha) \\ 0 & \text{si } T_0^2 \leq t_{p,n-1}^2(\alpha) \end{cases}$$

con

$$t_{p,n-1}^2(\alpha) = \frac{p(n-1)}{n-p} f_{p,n-p}(\alpha)$$



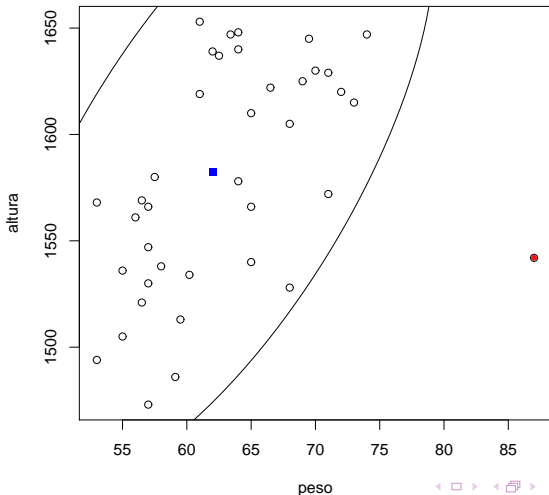
Ejemplo



Elipse obtenida mediante un S -estimador (\mathbf{m} , \mathbf{V})

Para detectar datos atípicos construimos la elipse

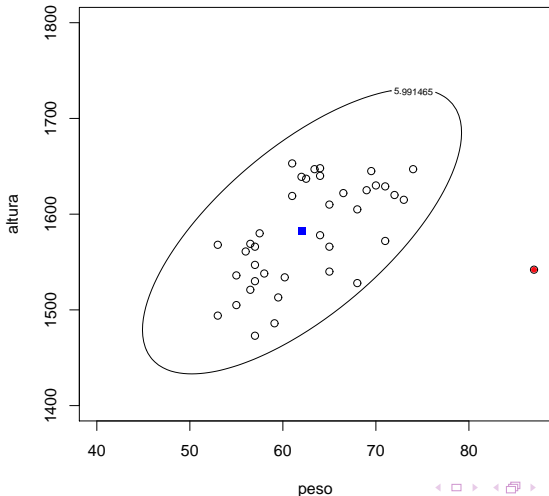
$$\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p : (\mathbf{u} - \mathbf{m})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{m}) \leq \chi_{p,0.05}^2\}$$



Elipse obtenida mediante un S -estimador (\mathbf{m} , \mathbf{V})

Para detectar datos atípicos construimos la elipse

$$\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p : (\mathbf{u} - \mathbf{m})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{m}) \leq \chi_{p,0.05}^2\}$$



Ejemplo

Queremos testear

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

con $\mu_0 = (63.64, 1615.38)^T$.

Haremos el test con todos los datos menos la observación $(87, 1542)^T$ que es un dato atípico.

Tenemos que

$$T_0^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) = 20.27881$$

y

$$F_0 = \frac{n-p}{p} \frac{T_0^2}{n-1} = 9.865$$

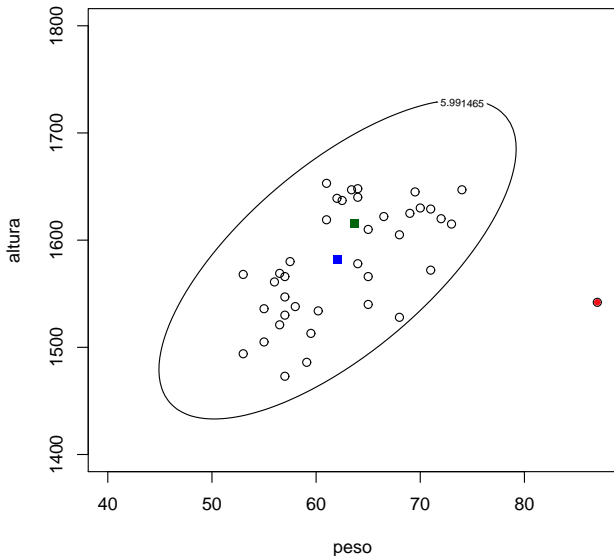
Como $f_{2,36}(0.001) = 8.420$ rechazo con nivel $\alpha = 0.001$.

Más aún, el p -valor es 0.00038.

Programa

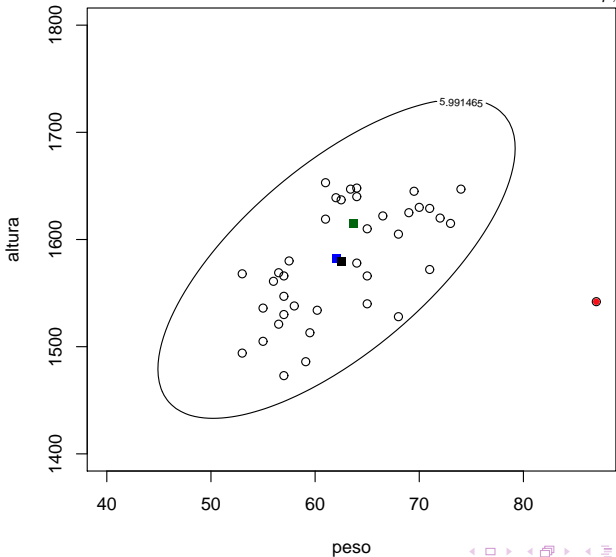
```
x<-cbind(peso,altura)
plot(peso,altura)
points(peso[39],altura[39],col="red",pch=20)
y<-x[-39,]
oy<-apply(y,2,mean)
wsigma<-cov(y)
mu0<-cbind(63.64,1615.38)
n<-dim(y)[1]
p<-dim(y)[2]
T0<-n*(oy-mu0)%*%solve(wsigma)%*%t(oy-mu0)
F0<-T0*(n-p)/(p*(n-1))
falha<-qf(0.001, p, n-p, ncp=0, lower.tail = FALSE, log.p = FALSE)
pvalor<-pf(F0, p, n-p, ncp=0, lower.tail = FALSE, log.p = FALSE)
```

En verde μ_0 , En rojo el dato atípico, En azul el centro robusto. Se grafica la elipse de detección $\{u \in \mathbb{R}^p : (u - m)^T V^{-1} (u - m) \leq \chi_{p,0.05}^2\}$



En verde μ_0 , En rojo el dato atípico, En azul el centro robusto

En negro el promedio de todos los datos menos la observación $(87, 1542)^T$. Se grafica la elipse de detección $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p : (\mathbf{u} - \mathbf{m})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{m}) \leq \chi_{p,0.05}^2\}$





Potencia del test

Hemos visto que

$$\frac{n-p}{p} \frac{T_0^2}{n-1} \sim \mathcal{F}_{p, n-p}(\lambda^2)$$

con $\lambda^2 = n(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)$.

Potencia del test

Hemos visto que

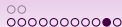
$$\frac{n-p}{p} \frac{T_0^2}{n-1} \sim \mathcal{F}_{p, n-p}(\lambda^2)$$

con $\lambda^2 = n(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)$.

Luego, si $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$ es una alternativa fija, la potencia del test Φ e está dada por

$$\mathbb{P} \left(\frac{n-p}{p} \frac{T_0^2}{n-1} \geq f_{p, n-p}(\alpha) \right) = \mathbb{P} \left(\mathcal{F}_{p, n-p}(\lambda^2) \geq f_{p, n-p}(\alpha) \right)$$

que es una función de p , $n-p$ y de $\delta = (\lambda^2/(p+1))^{1/2}$.



Propiedades del test

El test de Hotelling es

- invariante por transformaciones lineales no singulares
- UMP de nivel α entre los invariantes por transformaciones lineales.
- UMP de nivel α entre los tests cuya potencia depende de $(\mu - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0)$
- admisible

Propiedades del test

- El test de Hotelling es el test derivado del principio de unión intersección

$$T_0^2 = \sup_{\mathbf{a} \neq 0} t_0^2(\mathbf{a}) \quad \text{con} \quad t_0(\mathbf{a}) = \sqrt{n} \frac{\mathbf{a}^T (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)}{(\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a})^{\frac{1}{2}}}$$

Propiedades del test

- El test de Hotelling es el test derivado del principio de unión intersección

$$T_0^2 = \sup_{\mathbf{a} \neq \mathbf{0}} t_0^2(\mathbf{a}) \quad \text{con} \quad t_0(\mathbf{a}) = \sqrt{n} \frac{\mathbf{a}^T (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)}{(\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a})^{\frac{1}{2}}}$$

- Esto permite obtener intervalos simultáneos. Si llamamos

$$t_{p,N}^2(\alpha) = \frac{p N}{N - p + 1} f_{p,N-p+1}(\alpha)$$

tenemos que $\forall (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} \left(\mathbf{a}^T \bar{\mathbf{x}} - \frac{(\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} t_{p,n-1}(\alpha) \leq \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} \leq \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{x}} + \frac{(\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} t_{p,n-1}(\alpha) \right) = 1 - \alpha$$

lo que provee un método análogo al de Scheffe para contrastes.

Dos muestras

- $\mathbf{x}_{1,1}, \dots, \mathbf{x}_{1,n_1}$ i.i.d., $\mathbf{x}_{1,j} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_{1,j} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$
- $\mathbf{x}_{2,1}, \dots, \mathbf{x}_{2,n_2}$ i.i.d., $\mathbf{x}_{2,j} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_{2,j} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$
- Supongamos que ambas muestras son independientes entre sí

Definamos

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \mathbf{x}_{1,j} \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \mathbf{x}_{2,j}$$

Queremos testear

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$$

$$H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$$

cuando $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$ desconocida.

Dos muestras

- $\mathbf{x}_{1,1}, \dots, \mathbf{x}_{1,n_1}$ i.i.d., $\mathbf{x}_{1,j} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_{1,j} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma})$
- $\mathbf{x}_{2,1}, \dots, \mathbf{x}_{2,n_2}$ i.i.d., $\mathbf{x}_{2,j} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_{2,j} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma})$
- Supongamos que ambas muestras son independientes entre sí

Definamos

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{x}_{i,j} - \bar{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{x}_{i,j} - \bar{\mathbf{x}}_i)^T \quad i = 1, 2$$

y sea

$$\mathbf{S} = \frac{(n_1 - 1)\mathbf{S}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{S}_2}{n_1 + n_2 - 2}$$



Dos muestras: Teorema

a) Sea

$$T_0^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)$$

entonces

$$\frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)p} T_0^2 \sim \mathcal{F}_{p, n_1 + n_2 - p - 1}(\lambda^2)$$

$$\text{con } \lambda^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2).$$

Dos muestras: Teorema

a) Sea

$$T_0^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)$$

entonces

$$\frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)p} T_0^2 \sim \mathcal{F}_{p, n_1 + n_2 - p - 1}(\lambda^2)$$

$$\text{con } \lambda^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2).$$

b) Un test para $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ $H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$ está dado por

$$\Phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) > t_{p, n_1 + n_2 - 2}^2(\alpha) \\ 0 & \text{si } \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \leq t_{p, n_1 + n_2 - 2}^2(\alpha) \end{cases}$$

$$\text{con } t_{p, N}^2(\alpha) = \frac{pN}{N-p+1} f_{p, N-p+1}(\alpha)$$

Dos muestras: Propiedades

El test de Hotelling es

- el test de cociente de verosimilitud
- el test derivado del principio de unión intersección

$$T_0^2 = \sup_{\mathbf{a} \neq 0} t_0^2(\mathbf{a}) \quad \text{con} \quad t_0(\mathbf{a}) = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \frac{\mathbf{a}^T (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)}{(\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a})^{\frac{1}{2}}}$$

El supremo se alcanza en

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)$$

A la función $H(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{u}$ se la llama función discriminante lineal.

Teorema

- Una región de confianza de nivel $1 - \alpha$ para $\theta = \mu_1 - \mu_2$ está dada por

$$\left\{ \theta : \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2 - \theta)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2 - \theta) \leq t_{p, n_1 + n_2 - 2}^2(\alpha) \right\}$$

donde

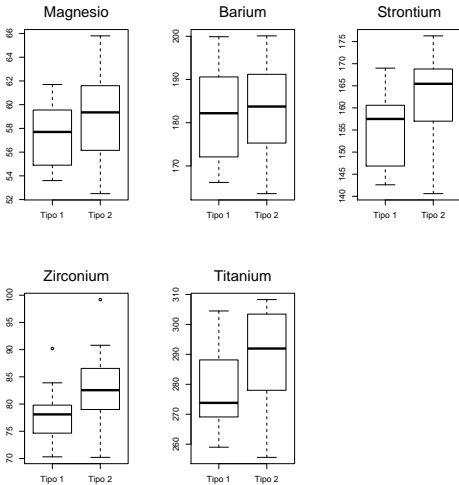
$$t_{p, N}^2(\alpha) = \frac{p N}{N - p + 1} f_{p, N - p + 1}(\alpha)$$

- Un conjunto de intervalos simultáneos es

$$\mathbf{a}^T (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \pm \left(\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} \right)^{\frac{1}{2}} t_{p, n_1 + n_2 - 2}(\alpha)$$

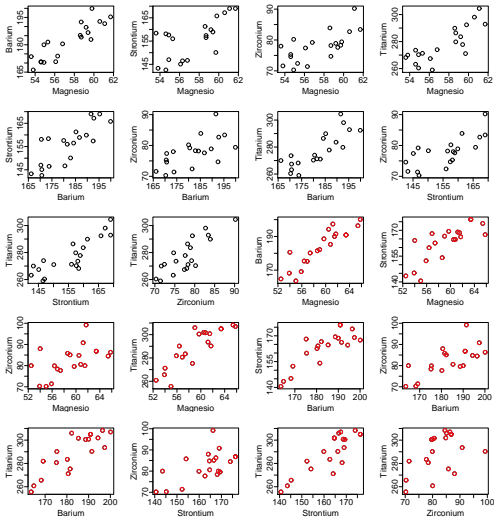


Ejemplo: Boxplots





Ejemplo





Ejemplo

Queremos testear

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 57.860 \\ 182.892 \\ 155.467 \\ 77.845 \\ 277.396 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 59.554 \\ 183.832 \\ 163.299 \\ 81.4887 \\ 291.625 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1.730 \\ -1.390 \\ -6.860 \\ -4.425 \\ -11.545 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 10.825 & 30.636 & 23.410 & 11.915 & 41.361 \\ & 109.865 & 82.385 & 43.337 & 129.349 \\ & & 90.452 & 37.707 & 121.731 \\ & & & 36.826 & 53.564 \\ & & & & 219.991 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Queremos testear

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Obtenemos

$$T_0^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) = 25.1697$$

y

$$F_0 = \frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)p} T_0^2 = 4.504052$$

Como $f_{p, n_1 + n_2 - p - 1}(0.01) = f_{5, 34}(0.01) = 3.610562$ rechazo con nivel $\alpha = 0.01$.

Más aún, el p -valor es 0.002949.

Ejemplo

Un conjunto de intervalos simultáneos de nivel $1 - \alpha$ con $\alpha = 0.01$

$$\mathbf{a}^T(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \pm \left(\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} \right) \mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} \right)^{\frac{1}{2}} t_{5,38}(\alpha)$$

$$= \mathbf{a}^T(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \pm \left(\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2.017667} = \mathbf{a}^T(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \pm 1.4204 \left(\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} \right)^{\frac{1}{2}}$$

\mathbf{a}	$\mathbf{a}^T(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)$	$\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a}$	$(\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a})^{1/2}$	Intervalo
$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$	-1.730	10.825	3.290	(-6.404, 2.944)
$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$	-1.390	109.865	10.482	(-16.279, 13.499)
$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$	-6.860	90.452	9.511	(-20.369, 6.649)
$\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$	-4.425	36.826	6.068	(-13.045, 4.195)
$\mathbf{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$	-11.545	219.991	14.832	(-32.613, 9.523)
$(1, -1, 0, 0, 0)/\sqrt{2}$	-0.240	29.709	5.451	(-7.983, 7.502)
$\hat{\mathbf{a}}$	2.517	2.517	1.586	(0.263, 4.771)

Si usamos Bonferroni los intervalos de nivel por lo menos $1 - \alpha$ son

$\mathbf{a}^T(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \pm \left(\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} \right)^{\frac{1}{2}} \xi$ donde $\xi = 1.0496$ si consideramos solamente los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_5$ y $\xi = 1.0877$ para los 7 vectores dados.

Efecto de no cumplimiento de la hipótesis $\Sigma_1 = \Sigma_2$

Supongamos que n_1 y n_2 son suficientemente grandes como para que $\mathbf{S}_j \simeq \Sigma_j$, entonces

$$\begin{aligned}
 T_0^2 &= \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \left(\frac{(n_1 - 1)\mathbf{S}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{S}_2}{n_1 + n_2 - 2} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \\
 &\simeq (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \left(\frac{1}{n_2} \Sigma_1 + \frac{1}{n_1} \Sigma_2 \right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) = D_0^2
 \end{aligned}$$

Efecto de no cumplimiento de la hipótesis $\Sigma_1 = \Sigma_2$

Supongamos que n_1 y n_2 son suficientemente grandes como para que $\mathbf{S}_j \simeq \Sigma_j$, entonces

$$T_0^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \left(\frac{(n_1 - 1)\mathbf{S}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{S}_2}{n_1 + n_2 - 2} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)$$

$$\simeq (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \left(\frac{1}{n_2} \Sigma_1 + \frac{1}{n_1} \Sigma_2 \right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) = D_0^2$$

Pero $(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \sim N(\boldsymbol{\theta}, (1/n_1)\Sigma_1 + (1/n_2)\Sigma_2)$, luego

Efecto de no cumplimiento de la hipótesis $\Sigma_1 = \Sigma_2$

Supongamos que n_1 y n_2 son suficientemente grandes como para que $\mathbf{S}_j \simeq \Sigma_j$, entonces

$$T_0^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \left(\frac{(n_1 - 1)\mathbf{S}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{S}_2}{n_1 + n_2 - 2} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)$$

$$\simeq (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \left(\frac{1}{n_2} \Sigma_1 + \frac{1}{n_1} \Sigma_2 \right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) = D_0^2$$

Pero $(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \sim N(\boldsymbol{\theta}, (1/n_1)\Sigma_1 + (1/n_2)\Sigma_2)$, luego

$$D_1^2 = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \left(\frac{1}{n_1} \Sigma_1 + \frac{1}{n_2} \Sigma_2 \right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \sim \chi_p^2(\lambda^2)$$

con

$$\lambda^2 = \boldsymbol{\theta}^T \left(\frac{1}{n_1} \Sigma_1 + \frac{1}{n_2} \Sigma_2 \right)^{-1} \boldsymbol{\theta} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2.$$

Luego, bajo H_0 , $\boldsymbol{\theta} = 0$, o sea, $D_1^2 \sim \chi_p^2$.

Efecto de no cumplimiento de la hipótesis $\Sigma_1 = \Sigma_2$

- Si $n_1 = n_2$, $D_0^2 = D_1^2$, o sea, en este caso la distribución de T_0^2 será poco sensible al alejamiento del supuesto $\Sigma_1 = \Sigma_2$
- Si $n_1 \simeq n_2$, n_1 y n_2 son grandes, hay poco efecto ver Ito and Schull (1964, Biometrika)
- Si n_1 y n_2 son muy diferentes, la diferencia entre Σ_1 y Σ_2 tiene un efecto importante en nivel y potencia.

Problema de Fisher–Behrens: Caso $n_1 = n_2 = n$

Definamos $\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_{1,i} - \mathbf{x}_{2,i}$, $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbf{u}_i \sim N(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2).$$

Para testear $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ $H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$, definamos

$$T_{0,\mathbf{u}}^2 = n \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{S}_{\mathbf{u}}^{-1} \bar{\mathbf{u}}$$

Luego, bajo H_0 , $T_{0,\mathbf{u}}^2 \sim T_{p,n-1}^2$, por lo tanto,

$$\frac{(n-p) T_{0,\mathbf{u}}^2}{p(n-1)} \sim \mathcal{F}_{p,n-p}$$

por lo tanto, rechazo H_0 si

$$T_{0,\mathbf{u}}^2 > \frac{(n-1)p}{n-p} f_{p,n-p}(\alpha).$$

Problema de Fisher–Behrens: Caso $n_1 = n_2 = n$

Problema: Este test tiene pérdida de potencia si $\Sigma_1 = \Sigma_2$ pues está basado en n observaciones, obteniendo un Hotelling con $n - 1$ grados de libertad,

$$T_{0,\mathbf{u}}^2 \sim T_{p,n-1}^2$$

mientras que

$$T_0^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \sim T_{p,2(n-1)}^2$$

tendrá $2(n - 1)$ grados de libertad.

Problema de Fisher–Behrens: Solución Bennet (1951)

Supongamos $n_1 \leq n_2$. Definamos

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_{1,i} - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/2} \mathbf{x}_{2,i}, \quad 1 \leq i \leq n_1$$

Sean

$$\mathbf{S}_u = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}})^T$$

$$T_0^2 = n_1 (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}_u^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)$$

Entonces, bajo $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$,

$$T_0^2 \sim T_{p, n_1 - 1}^2.$$

Luego, el test rechaza H_0 si

$$T_0^2 > \frac{(n_1 - 1)p}{n_1 - p} f_{p, n_1 - p}(\alpha)$$

Problema de Fisher–Behrens: Solución James (1954)

Sabemos que $(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \sim N(\boldsymbol{\theta}, (1/n_1)\boldsymbol{\Sigma}_1 + (1/n_2)\boldsymbol{\Sigma}_2)$ luego

$$D_1^2 = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \left(\frac{1}{n_1}\boldsymbol{\Sigma}_1 + \frac{1}{n_2}\boldsymbol{\Sigma}_2 \right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \sim \chi_p^2(\lambda^2)$$

con

$$\lambda^2 = \boldsymbol{\theta}^T \left(\frac{1}{n_1}\boldsymbol{\Sigma}_1 + \frac{1}{n_2}\boldsymbol{\Sigma}_2 \right)^{-1} \boldsymbol{\theta} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2.$$

Un estadístico para testear $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ es

$$V = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}_W^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \quad \text{con} \quad \mathbf{S}_W = \frac{1}{n_1}\mathbf{S}_1 + \frac{1}{n_2}\mathbf{S}_2$$

Problema de Fisher–Behrens: Solución James (1954)

$$V = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}_W^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \quad \text{con} \quad \mathbf{S}_W = \frac{1}{n_1} \mathbf{S}_1 + \frac{1}{n_2} \mathbf{S}_2$$

Rechazo H_0 si

$$V > k_\alpha$$

donde

$$k_\alpha = \chi_{p,\alpha}^2 (A + B \chi_{p,\alpha}^2)$$

Problema de Fisher–Behrens: Aproximación Yao (1965)

$$V = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}_W^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \quad \text{con} \quad \mathbf{S}_W = \frac{1}{n_1} \mathbf{S}_1 + \frac{1}{n_2} \mathbf{S}_2$$

Yao aproximó la distribución de V bajo H_0 por un Hotelling

$$V \sim T_{p,m}^2$$

donde

$$\frac{1}{m} = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{n_j - 1} \left\{ \frac{(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}_W^{-1} \frac{\mathbf{S}_j}{n_j} \mathbf{S}_W^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)}{(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}_W^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)} \right\}^2$$

y $\min(n_1 - 1, n_2 - 1) \leq m \leq n_1 + n_2 - 2$. Luego, rechazo H_0 si

$$V > \frac{pm}{m - p + 1} f_{p, m-p+1}(\alpha)$$

pero esta solución no es mejor que la de Bennet ya que da niveles empíricos más altos sobre todo cuando crece p .

Otra opción: Bootstrap Paramétrico

$$V = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)^T \mathbf{S}_W^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \quad \text{con} \quad \mathbf{S}_W = \frac{1}{n_1} \mathbf{S}_1 + \frac{1}{n_2} \mathbf{S}_2$$

a) Genero

- $\mathbf{x}_{1,1}^*, \dots, \mathbf{x}_{1,n_1}^*$ i.i.d., $\mathbf{x}_{1,j}^* \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_{1,j}^* \sim N_p(\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{S}_1)$
- $\mathbf{x}_{2,1}^*, \dots, \mathbf{x}_{2,n_2}^*$ i.i.d., $\mathbf{x}_{2,j}^* \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_{2,j}^* \sim N_p(\bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{S}_2)$
- $\mathbf{x}_{1,1}^*, \dots, \mathbf{x}_{1,n_1}^*$ independientes de $\mathbf{x}_{2,1}^*, \dots, \mathbf{x}_{2,n_2}^*$

b) Calculo

$$\bar{\mathbf{x}}_i^* = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{x}_{i,j}^* \quad \mathbf{S}_i^* = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{x}_{i,j}^* - \bar{\mathbf{x}}_i^*)(\mathbf{x}_{i,j}^* - \bar{\mathbf{x}}_i^*)^T \quad i = 1, 2$$

y definamos

$$V^* = (\bar{\mathbf{x}}_1^* - \bar{\mathbf{x}}_2^*)^T (\mathbf{S}_W^*)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1^* - \bar{\mathbf{x}}_2^*) \quad \text{con} \quad \mathbf{S}_W^* = \frac{1}{n_1} \mathbf{S}_1^* + \frac{1}{n_2} \mathbf{S}_2^*$$

Otra opción: Bootstrap Paramétrico

- c) Repitamos a) y b) N_{boot} veces obteniendo $V_1^*, \dots, V_{N_{boot}}^*$.
- d) El p -valor se estima como

$$p = \frac{k}{N_{boot} + 1}$$

donde k es la cantidad de V_j^* que son mayores o iguales que V .

$$V = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^T \mathbf{S}_W^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \quad \text{con} \quad \mathbf{S}_W = \frac{1}{n_1} \mathbf{S}_1 + \frac{1}{n_2} \mathbf{S}_2$$



Supongamos tener una batería de p tests psicológicos que se aplican a n_1 individuos de una cierta población. $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_1}$ son los resultados obtenidos.

$$\mathbf{x}_i \sim N(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Sigma})$$

El gráfico obtenido uniéndolo los puntos $(1, \eta_1), \dots, (p, \eta_p)$ se llama el perfil de la población.

Supongamos tener una batería de p tests psicológicos que se aplican a n_1 individuos de una cierta población. $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_1}$ son los resultados obtenidos.

$$\mathbf{x}_i \sim N(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Sigma})$$

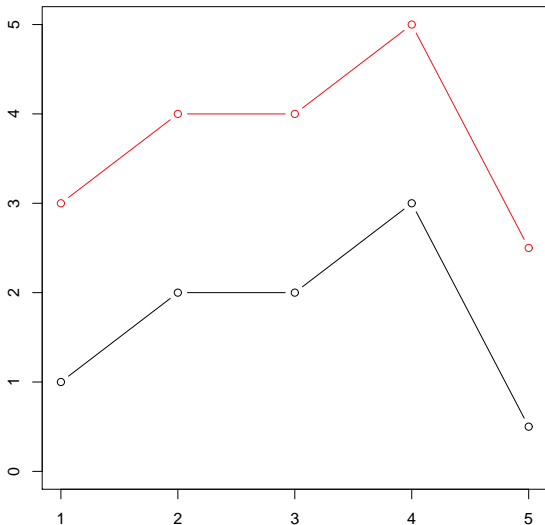
El gráfico obtenido uniéndolo los puntos $(1, \eta_1), \dots, (p, \eta_p)$ se llama el perfil de la población.

Supongamos tener una muestra de otra población de n_2 individuos. $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n_2}$ son los resultados obtenidos. Supongamos que

$$\mathbf{y}_i \sim N(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Queremos comparar los perfiles $(1, \eta_1), \dots, (p, \eta_p)$ y $(1, \nu_1), \dots, (p, \nu_p)$.

Hipótesis H_{01} Paralelismo



Hipótesis H_{01} Paralelismo o no interacción

$$H_{01} : \eta_k - \eta_{k-1} = \nu_k - \nu_{k-1} \quad k = 2, \dots, p$$

Sea

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(p-1) \times p}, \quad \text{rango}(\mathbf{C}_1) = p-1$$

Luego testear H_{01} es equivalente a testear

$$\mathbf{C}_1 \boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\nu}$$

Hipótesis H_{01} Paralelismo o no interacción

$$H_{01} : \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\nu}$$

Definamos

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_i \sim N_{p-1}(\mathbf{C}_1 \boldsymbol{\eta}, \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{C}_1^T)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{C}_1 \mathbf{y}_i \sim N_{p-1}(\mathbf{C}_1 \boldsymbol{\nu}, \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{C}_1^T)$$

Sea

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{(n_1 - 1)\mathbf{S}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{S}_2}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n_1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T + \sum_{j=1}^{n_2} (\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}})^T}{n_1 + n_2 - 2} \end{aligned}$$

Luego, bajo $H_{0,1}$

$$T_0^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{C}_1^T (\mathbf{C}_1 \mathbf{S} \mathbf{C}_1^T)^{-1} \mathbf{C}_1 (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}) \sim T_{p-1, n_1+n_2-2}^2$$

Hipótesis H_{01} Paralelismo o no interacción

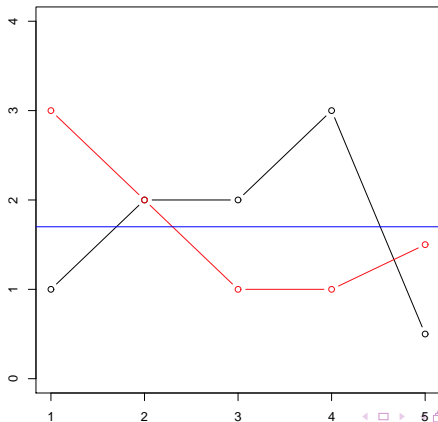
$$H_{01} : \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\nu}$$

Por lo tanto rechazo $H_{0,1}$ si

$$T_0^2 > \frac{(n_1 + n_2 - 2)(p - 1)}{n_1 + n_2 - p} f_{p-1, n_1+n_2-p}(\alpha)$$

Hipótesis H_{02} No hay efecto principal por población

$$H_{02} : \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \eta_j = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \nu_j$$





Hipótesis H_{02} No hay efecto principal por población

$$H_{02} : \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \eta_j = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \nu_j$$

Si H_{01} y H_{02} son ambas ciertas, los perfiles coinciden. Sea $\mathbf{1}_p = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^p$, luego

$$H_{02} : \mathbf{1}_p^T \boldsymbol{\eta} = \mathbf{1}_p^T \boldsymbol{\nu}$$

Sea

$$v_i = \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}_i \sim N_1(\mathbf{1}_p^T \boldsymbol{\eta}, \mathbf{1}_p^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1})$$

$$u_i = \mathbf{1}_p^T \mathbf{y}_i \sim N_1(\mathbf{1}_p^T \boldsymbol{\nu}, \mathbf{1}_p^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1})$$

Observemos que $\mathbf{1}_p^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1} = \sum_{i,j} \sigma_{ij}$.

Hipótesis $H_{0,2}$

Luego, bajo $H_{0,2}$

$$\begin{aligned}
 T_0^2 &= \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \mathbf{1}_p^T (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}) (\mathbf{1}_p^T \mathbf{S} \mathbf{1}_p)^{-1} \mathbf{1}_p^T (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}) \\
 &= \left\{ \frac{\mathbf{1}_p^T (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})}{\left[\mathbf{1}_p^T \mathbf{S} \mathbf{1}_p \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \right]^{1/2}} \right\}^2 \sim T_{1, n_1 + n_2 - 2}^2 = \mathcal{F}_{1, n_1 + n_2 - 2}
 \end{aligned}$$

Hipótesis H_{02}

Luego, bajo $H_{0,2}$

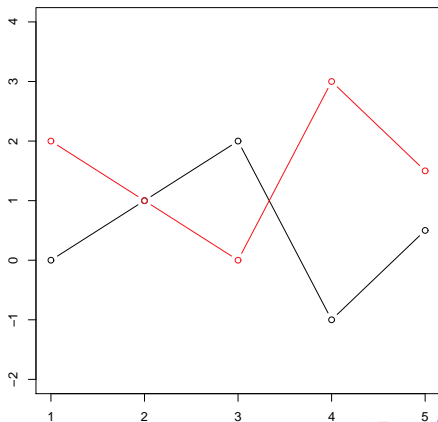
$$\begin{aligned}
 T_0^2 &= \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \mathbf{1}_p^T (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}) (\mathbf{1}_p^T \mathbf{S} \mathbf{1}_p)^{-1} \mathbf{1}_p^T (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}) \\
 &= \left\{ \frac{\mathbf{1}_p^T (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})}{\left[\mathbf{1}_p^T \mathbf{S} \mathbf{1}_p \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \right]^{1/2}} \right\}^2 \sim T_{1, n_1 + n_2 - 2}^2 = \mathcal{F}_{1, n_1 + n_2 - 2}
 \end{aligned}$$

O sea, rechazo H_{02} si

$$\frac{|\sum_{j=1}^p (\bar{x}_j - \bar{y}_j)|}{\left[\sum_{i,j} s_{ij} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \right]^{1/2}} > t_{n_1 + n_2 - 2, \alpha}$$

Hipótesis H_{03} No hay efecto principal por test

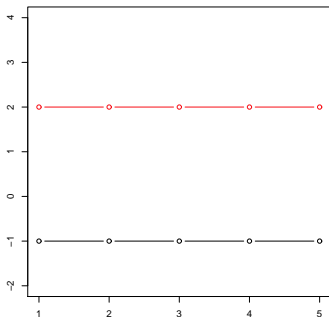
$$H_{02} : \frac{1}{2}(\eta_1 + \nu_1) = \frac{1}{2}(\eta_2 + \nu_2) = \cdots = \frac{1}{2}(\eta_p + \nu_p)$$

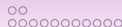


Hipótesis H_{03} No hay efecto principal por test

$$H_{03} : \frac{1}{2}(\eta_1 + \nu_1) = \frac{1}{2}(\eta_2 + \nu_2) = \cdots = \frac{1}{2}(\eta_p + \nu_p)$$

Si H_{01} y H_{03} son ambas ciertas, los perfiles son constantes, o sea, $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_p$ y $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_p$.





Hipótesis H_{03} No hay efecto principal por test

$$H_{03} : \frac{1}{2}(\eta_1 + \nu_1) = \frac{1}{2}(\eta_2 + \nu_2) = \cdots = \frac{1}{2}(\eta_p + \nu_p)$$

Sea

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(p-1) \times p}, \quad \text{rango}(\mathbf{C}_1) = p-1$$

Luego testear H_{03} es equivalente a testear

$$\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\nu}) = 0 \quad \text{o sea} \quad \mathbf{C}_1\boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}_1(-\boldsymbol{\nu})$$

Hipótesis H_{03} No hay efecto principal por test

$$H_{03} : \frac{1}{2}(\eta_1 + \nu_1) = \frac{1}{2}(\eta_2 + \nu_2) = \dots = \frac{1}{2}(\eta_p + \nu_p) \text{ o sea } \mathbf{C}_1\boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}_1(-\boldsymbol{\nu})$$

Definamos

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_j \sim N_{p-1}(\mathbf{C}_1\boldsymbol{\eta}, \mathbf{C}_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}_1^T)$$

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{C}_1(-\mathbf{y}_j) \sim N_{p-1}(-\mathbf{C}_1\boldsymbol{\nu}, \mathbf{C}_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}_1^T)$$

Sea

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{(n_1 - 1)\mathbf{S}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{S}_2}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n_1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T + \sum_{j=1}^{n_2} (\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}})^T}{n_1 + n_2 - 2} \end{aligned}$$

Hipótesis H_{03} No hay efecto principal por test

$$H_{03} : \frac{1}{2}(\eta_1 + \nu_1) = \frac{1}{2}(\eta_2 + \nu_2) = \dots = \frac{1}{2}(\eta_p + \nu_p) \text{ o sea } \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}_1(-\boldsymbol{\nu})$$

Luego, bajo H_{03}

$$T_0^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{C}_1^T (\mathbf{C}_1 \mathbf{S} \mathbf{C}_1^T)^{-1} \mathbf{C}_1 (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) \sim T_{p-1, n_1+n_2-2}^2$$

Por lo tanto rechazo H_{03} si

$$T_0^2 > \frac{(n_1 + n_2 - 2)(p - 1)}{n_1 + n_2 - p} f_{p-1, n_1+n_2-p}(\alpha)$$

Hipótesis H_{03} No hay efecto principal por test

$$H_{03} : \frac{1}{2}(\eta_1 + \nu_1) = \frac{1}{2}(\eta_2 + \nu_2) = \dots = \frac{1}{2}(\eta_p + \nu_p) \text{ o sea } \mathbf{C}_1\boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}_1(-\boldsymbol{\nu})$$

Queremos testear H_{03} dado que H_{01} es cierto, o sea, cuando sabemos que $\mathbf{C}_1\boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}_1\boldsymbol{\nu}$. Definamos

$$\bar{\mathbf{z}} = \frac{n_1\bar{\mathbf{x}} + n_2\bar{\mathbf{y}}}{n_1 + n_2} \sim N_p\left(\frac{n_1\boldsymbol{\eta} + n_2\boldsymbol{\nu}}{n_1 + n_2}, \frac{1}{n_1 + n_2}\boldsymbol{\Sigma}\right)$$

$$\mathbf{S} = \frac{(n_1 - 1)\mathbf{S}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{S}_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\mathbf{Q} = (n_1 + n_2 - 2)\mathbf{S} \sim \mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}, p, n_1 + n_2 - 2)$$

de donde

$$\mathbf{C}_1\bar{\mathbf{z}} \sim N_p\left(\frac{n_1\mathbf{C}_1\boldsymbol{\eta} + n_2\mathbf{C}_1\boldsymbol{\nu}}{n_1 + n_2}, \frac{1}{n_1 + n_2}\mathbf{C}_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}_1^T\right)$$

$$\mathbf{C}_1\mathbf{Q}\mathbf{C}_1^T \sim \mathcal{W}(\mathbf{C}_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}_1^T, p - 1, n_1 + n_2 - 2)$$



Hipótesis H_{03} No hay efecto principal por test

$$H_{03} : \frac{1}{2}(\eta_1 + \nu_1) = \frac{1}{2}(\eta_2 + \nu_2) = \cdots = \frac{1}{2}(\eta_p + \nu_p) \text{ o sea } \mathbf{C}_1(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{0}$$

Queremos testear H_{03} dado que H_{01} es cierto, o sea, cuando sabemos que $\mathbf{C}_1\boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}_1\boldsymbol{\nu}$. Por lo tanto, $\mathbf{C}_1\boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}_1\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$

Bajo $H_{03} \cap H_{01}$, tenemos que

$$\mathbf{C}_1\bar{\mathbf{z}} \sim N_p(\mathbf{0}, \frac{1}{n_1 + n_2} \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{C}_1^T)$$

$$T_0^2 = (n_1 + n_2) (\mathbf{C}_1\bar{\mathbf{z}})^T (\mathbf{C}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{C}_1^T)^{-1} \mathbf{C}_1\bar{\mathbf{z}} \sim T_{p-1, n_1+n_2-2}^2$$

Por lo tanto, rechazo H_{03} cuando H_{01} es cierta, si

$$T_0^2 > \frac{(n_1 + n_2 - 2)(p - 1)}{n_1 + n_2 - p} f_{p-1, n_1+n_2-p}(\alpha)$$