Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2017

Práctica 6

Operadores acotados en espacios de Hilbert

En esta guia, H denota un espacio de Hilbert.

1. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, probar que

$$\begin{array}{llll} i) & \mathrm{Ran}(T)^{\perp} = \ker(T^*) & ii) & \mathrm{Ran}(T^*)^{\perp} = \ker(T) \\ iii) & \overline{\mathrm{Ran}(T)} = \ker(T^*)^{\perp} & iv) & \mathrm{Ran}(T^*) \subset \ker(T)^{\perp}. \end{array}$$

   Y además, si $\mathrm{Ran}(T)$ es cerrado, entonces $\mathrm{Ran}(T^*)$ es cerrado y $\mathrm{Ran}(T^*) = \ker(T)^{\perp}$.

2. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ normal, probar que

   a) $\ker(T) = \ker(T^*)$,

   b) T tiene rango denso si y solo si es inyectivo,

   c) El espectro residual es vacío, $\sigma_r(T) = \emptyset$,

   d) T es inversible si y solo si es acotado inferiormente,

   e) Autovectores de T correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

3. Sean $A, B \in \mathcal{L}(H)$ y supongamos que $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ para todo $x \in H$. Probar que $A = B$. ¿Qué pasa si H no es complejo?

4. Si $A^* = A \in \mathcal{L}(H)$, probar que $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$.

   (Sugerencia: $4Re\langle Ax, y\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle$*).*

5. Sea $P^2 = P \in \mathcal{L}(H)$, decimos que P es ortogonal si $\mathrm{Ran}P \perp \ker P$. Probar que son equivalentes:

   a) P es ortogonal

   b) $P^* = P$

   c) P es normal

   d) $\|P\| \leqslant 1$

6. Sean $U, S, Q \in \mathcal{L}(H)$, U unitario, S simetría ($S^* = S = S^{-1}$). Probar que

   a) $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$, $\sigma(S) \subset \{-1, 1\}$

   b) $P = (1+S)/2$ es un proyector ortogonal, y S es la identidad en el rango de P, y -1 en el núcleo de P.

   c) Si $Q^* = Q$ y $\sigma(Q) \subset \{0, 1\}$ entonces $Q^2 = Q$ (Q es un proyector ortogonal).

7. Si $(P_n)_n \subseteq \mathcal{L}(H)$ es una familia disjunta de proyectores ortonormales ($P_nP_m = 0$ si $n \neq m$), y $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ está acotada, probar que

   a) La serie $\sum_n \lambda_n P_n$ es SOT-convergente a un operador acotado y normal en $T \in \mathcal{L}(H)$, cada λ_n es autovalor de T, y estos (exceptuando el 0) son los únicos posibles autovalores de T.

   b) Si $\lambda_n \to 0$ las suma converge en norma de operadores. Y si los P_n tienen rango finito, el operador T es compacto.

c) Si A es compacto autoadjunto, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ son sus autovalores no nulos, y P_n los proyectores a sus autoespacios, entonces $A = \sum_n \lambda_n P_n$ donde la convergencia es en norma de operadores.

8. Sean $A, B, C \in \mathcal{L}(H)$. Probar que si $0 \leqslant A \leqslant B$, entonces

   a) $0 \leqslant CAC^* \leqslant CBC^*$

   b) Si A es inversible, B es inversible y $\|B^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\|$.

   c) Si B es compacto, entonces A es compacto.

9. Consideramos $H = \mathbb{C}^2$. Probar que $|A+B|$ no es $\leqslant$ que $|A| + |B|$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Sea $A^* = A \in \mathcal{L}(H)$, $f \in C(\sigma(A))$. Probar que

    a) $f(A)$ conmuta con A, $f(A)$ conmuta con todo operador que conmuta con A.

    b) $\|f(A)\| = \|f\|_{\infty,\sigma(A)} = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

    c) Si f toma valores reales, entonces $f(A)$ es autoadjunto.

    d) Si $A \geqslant 0$ entonces $\|A^{1/2}\| = \sqrt{\|A\|}$.

    e) Si $\|A\| \leqslant 1$, entonces $U = f(A)$ es unitario, donde $f(t) = t + i\sqrt{1-t^2}$, y verifica $2A = U + U^*$.

    f) Todo operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es combinación lineal de (a lo sumo) 4 operadores unitarios.

    g) La transformada de Cayley $U = (A-i)(A+i)^{-1}$ es un operador unitario *(sug: $\|Ax+ix\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$).*

11. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$. Si $A = U|A|$ es la descomposición polar de A, entonces

    a) $\|Ax\| = \|\,|A|\,x\|$ para todo $x \in H$, $\|A\| = \|\,|A|\,\|$,

    b) $U^*U = P_{\mathrm{Ran}|A|}$, $UU^* = P_{\mathrm{Ran}A}$, $|A| = U^*A$,

    c) $\mathrm{Ran}|A| = \mathrm{Ran}A^*$, $\mathrm{Ran}|A^*| = \mathrm{Ran}A$,

    d) Si A es inversible entonces $|A|$ es inversible y U es unitario.

12. Sea $T = X + iY = U|T|$ la descomposición en parte real e imaginaria (resp. descomposición polar) de $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que son equivalentes:

    i) T es normal, *ii*) X e Y conmutan, *iii*) U y $|T|$ conmutan.

    a) Probar que si T es autoadjunto, U es una simetría ($U^* = U = U^{-1}$).
    b) Probar que si T es normal, $\mathrm{Ran}|T| = \mathrm{Ran}T$ luego U restringido es unitario allí
    c) Probar que si T es normal se puede reemplazar U por un operador unitario V, de manera que $T = V|T|$ *(sug: considerar $V = U + 1 - P_{RanA}$).*

13. Sea $K \in \mathcal{L}(H)$ compacto. Probar que

    a) Si $K^* = K$, $f \in C(\sigma(A))$, entonces $f(K)$ es compacto si y solo si $f(0) = 0$, y además si $K = \sum_{n\geqslant 0} \lambda_n P_n$ entonces

$$f(K) = \sum_{n\geqslant 0} f(\lambda_n) P_n,$$

b) $|K|$ es compacto (y si $|K|$ es compacto entonces K lo es),

c) Si K es normal, entonces $\mu_n(K) = |\lambda_n(K)|$ para todo $n \geqslant 0$ (hay que elegir un orden para los autovalores de K),

14. Sean $H = L^2(X, \mu)$, $k \in L^2(X \times X)$ y $K \in \mathcal{L}(H)$ el operador integral compacto con núcleo k.

a) Calcular K^* y caracterizar cuando K es normal, cuando es autoadjunto.

b) Calcular $|K|$ y probar que $\sigma(|K|) \subset \ell^2$.

15. Sea $K \in \mathcal{L}(H)$ compacto. Probar que

a) La función $x \mapsto \langle Kx, x\rangle$ es ω-continua.

b) $\mu_n(K) = \lambda_n(|K|) = \min_{E_n} \text{máx}_{\{x \in E_n^\perp, \|x\|=1\}} \langle Ax, x\rangle$ donde $E_n \subset H$ recorre los subespacios de dimensión $n \geqslant 0$,

c) $\mu_k(AKB) \leqslant \|A\|\,\|B\|\,\mu_n(K)$ para todo $n \geqslant 0$ y todo $A, B \in \mathcal{L}(H)$,

d) Si $0 \leqslant K_1 \leqslant K$, entonces $\mu_n(K_1) \leqslant \mu_n(K)$ para todo $n \geqslant 0$,

16. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$, $s, t \in \mathbb{R}$. Probar que

a) $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$, $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

b) Dada $f \in H$, la curva $\alpha(t) = e^{tA}f \subseteq H$ es solución de la ecuación diferencial $\dot{\alpha} = A\alpha$, $\alpha(0) = f$.

c) Si $A^* = A$, $\beta(t) = e^{itA}$ es un grupo a un parámetro de operadores unitarios.

d) Si $A \geqslant r > 0$, entonces $e^{-tA} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$ en norma de operadores.

17. Sea $\{e_n\}_n$ b.o.n. de H. Probar que

a) Si P_i, P son proyectores entonces $P_i \to P$ SOT si y solo si $P_i \to P$ WOT.

b) Sean $T_i \in \mathcal{L}(H)$, $\|T_i\| \leqslant M$. Entonces $T_i \to 0$ WOT si y solo si $\langle T_ie_n, e_m\rangle \xrightarrow{i} 0$ para todo n, m. Y $T_i \to 0$ SOT si y solo si $\|T_ie_n\| \xrightarrow{i} 0$ para todo n.

c) Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(H)$ tiende WOT a cero entonces $\|T_n\| \leqslant M$.

d) Si $C \subseteq \mathcal{L}(H)$ es convexo, la clausura SOT de C coincide con la clausura WOT *(sug: todo cerrado convexo es la intersección de los semiespacios que lo soportan).*

e) Sea $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ el shift a derecha, probar que 0 está en la clausura WOT de $C = \{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pero no está en las clausuras SOT ni en norma.

f) Probar que la adjunción $J : A \mapsto A^*$ es continua WOT y en norma, pero no es continua SOT *(sug: considerar la sucesión $T_n = e_1 \otimes e_n \in \mathcal{L}(E)$).*

18. Sea $A^* = A \in \mathcal{L}(H)$ y $f \in \mathcal{B}or(\sigma(A))$ acotada. Probar que

a) Aproximando f puntualmente con una sucesión *creciente* de funciones continuas f_n se tiene que $f_n(A) \to f(A)$ en la topología SOT *(sug: $f - f_n \geqslant 0$ luego $f(A) - f_n(A) = |f(A) - f_n(A)|$, y ejercicio anterior).*

b) Aproximando f uniformemente con una sucesión de funciones simples S_n se tiene que $f(A)$ es límite en norma de una sucesión de combinaciones lineales de proyectores.

19. Sea $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$. Probar que

   a) $A = T_+ - T_- + i(S_+ - S_-)$, donde $T_i, S_i \geqslant 0$.
   b) Si $f(x) = |x|$ entonces $|A| = f(A)$.
   c) Si $sgn(x)$ es la función real signo, ¿qué relación tiene $V = sgn(A)$ con la isometría parcial de la descomposición polar $A = U|A|$?

20. Sea $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$. Probar que

   a) Si $\lambda \notin \sigma(A)$, entonces $\|(A-\lambda)^{-1}\| = \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))^{-1}$.
   b) $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ si y solo si λ no es autovalor o bien $\ker(A-\lambda)$ tiene dimensión infinita.
   c) $\lambda \in \sigma(A)$ si y solo si $P(\lambda, \varepsilon) = E^A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq 0$ para todo $\varepsilon > 0$.
   d) $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ si y solo si el rango de $P(\lambda, \varepsilon)$ es infinito dimensional para todo $\varepsilon > 0$.
   e) $\lambda \in \sigma_d(A)$ si y solo si es un autovalor aislado y su autoespacio tiene dimensión finita.