Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2017

Práctica 5

Teoría espectral en espacios de Banach - Cálculo Funcional Analítico

En esta guia, E denota un espacio de Banach.

1. Sea $A \in \mathcal{L}(E)$, sea $n \in \mathbb{N}_0$. Probar que

    a) $\sigma(A^n) = \sigma(A)^n$.

    b) $\sigma(A^{-1}) = \sigma(A)^{-1}$ si $A \in GL(E)$.

    c) $\sigma(A) = \sigma(A')$.

2. Sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $1 \leqslant p < \infty$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

    a) $R(T)$ es cerrado si y sólo si $(1/\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada (considerando sólo los n tales que $\alpha_n \neq 0$).

    b) T es compacto si y sólo si $\alpha_n \to 0$

    c) $\mathrm{Ran}(T)$ es finito si y solo si finitos α_n son no nulos.

    d) Hallar $\sigma(T)$.

3. Dado $A \in \mathcal{L}(E)$, si $R(\lambda) = (A-\lambda)^{-1}$ es la resolvente de A definida en $\Omega = \sigma(A)^c$, probar que para todo $\lambda, \mu \in \Omega$

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu).$$

4. Sea $A \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$. Si $f : \Omega = \sigma(A)^c \to \mathbb{C}$ está dada por $f(\lambda) = \varphi((A-\lambda)^{-1})$, probar que

$$\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0) - (\lambda-\lambda_0)\varphi((A-\lambda_0)^{-2})}{\lambda - \lambda_0} \xrightarrow{\lambda\to\lambda_0} 0,$$

concluir que f es holomorfa en Ω y que $f'(\lambda) = \varphi((A-\lambda)^{-2})$.

5. Sea $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n(z-z_0)^n$ holomorfa en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, sea $A \in \mathcal{L}(E)$. Probar que

    a) La serie $S_A = \sum_{n\in N} c_n(A-z_0)^n$ es convergente en $\mathcal{L}(E)$ si $\|A - z_0\| < R$

    b) Si $\sigma(A) \subset \Omega$, este operador S_A coincide con el cálculo funcional de Riesz $f(A)$.

    c) Si f es entera, la serie de f evaluada en A coincide con el cálculo funcional de Riesz $f(A)$.

6. Probar que si $\{\lambda_i\}_{i=1..n} \subset \sigma_p(A)$ son todos distintos, y $v_i \in E$ son autovectores no nulos correspondientes a cada λ_i, entonces los v_i son linealmente independientes.

7. Sea $A \in \mathcal{L}(E)$ inversible y tal que $\sigma(A)$ no separa 0 de ∞ en $\mathbb{C}$. Probar que

    a) A tiene un logaritmo: existe $B \in \mathcal{L}(E)$ tal que $e^B = \exp(B) = A$.

    b) A tiene raíces n-ésimas: para todo $n \geq 0$ existe $C \in \mathcal{L}(E)$ tal que $C^n = A$.

    c) Si $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, entonces hay un logaritmo $B = \ln(A)$ tal que $\sigma(\ln(A)) \subset \{z : -\pi < \mathrm{Im} z < \pi\}$.

8. Sea $A \in \mathcal{L}(E)$, λ autovalor de A. Entonces $f(\lambda)$ es autovalor de $f(A)$, para toda $f \in \mathcal{H}ol(\sigma(A))$. ¿Todo autovalor de $f(A)$ es de esta forma?

9. Sean S, T los shifts a derecha e izquierda respectivamente, actuando en ℓ^p con $1 < p < \infty$.

   a) Probar que $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$, y que si $|\lambda| < 1$ entonces es autovalor.

   b) Calcular $\sigma(S)$ y probar que S no tiene autovalores.

10. Dada $\varphi \in L^\infty(X, \mu)$ y $1 \leq p < \infty$, consideramos M_φ el operador de multiplicación en $L^p(X, \mu)$, y definimos el rango esencial de φ como

$$\operatorname{im\,es}(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \forall \varepsilon > 0, \ \mu(x : |f(x) - \lambda| < \varepsilon) > 0\}.$$

   a) Probar que $\sigma(M_\varphi) = \operatorname{im\,es}(\varphi)$.

   b) $\lambda \in \sigma(M_\varphi)$ es autovalor si y solo si $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0$.

   c) Probar que $M'_\varphi = M_\varphi$, si identificamos $L^q = (L^p)'$, $1/p + 1/q = 1$.

   d) Probar que M_φ es inversible si y solo si es acotado inferiormente.

   e) Si $X = [0, 1]$ y φ es continua, probar que M_φ es compacto sólo si $\varphi = 0$.

11. Si $\varphi \in C(\mathbb{T})$ y H_φ, T_φ son los operadores Hankel y Toeplitz en el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{T}) = H^+$, denotamos $\chi_k(z) = z^k, k \in \mathbb{Z}$. Probar que

   a) $\{\chi_k f : k \in \mathbb{Z}, f \in H^2\}$ es denso en L^2.

   b) Si T_φ es inversible entonces M_φ es inversible en $L^2(\mathbb{T})$.

   c) $\sigma_{ess}(T_\varphi) \subseteq \operatorname{im}(\varphi) = \sigma(M_\varphi) \subseteq \sigma(T_\varphi)$ *(sug: considerar $T_\varphi T_{1/\varphi} = P_+ - P_+ M_\varphi H_{1/\varphi}$ para la primera inclusión).*

12. Sean $A, K \in \mathcal{L}(E)$ con K compacto, probar que $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A + K)$.

13. Sea $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto, probar que si $f \in \mathcal{H}ol(\sigma(K))$ y $f(0) = 0$, entonces $f(K)$ es compacto *(sug: $f(z) = zg(z)$ para alguna $g \in \mathcal{H}ol(\sigma(A))$).*

14. Sean $(X, \mu), (Y, \tilde{\mu})$ espacios de medida, y sean $\{f_n\}_n \subset L^2(X, \mu)$ (resp. $\{g_m\}_m \subset L^2(Y, \tilde{\mu})$) bases ortonormales. Sea $f_n g_m(x, y) = f_n(x) g_n(y)$. Probar que $\{f_n g_m\}_{n,m}$ es una b.o.n. de $L^2(X \times Y, \mu \times \tilde{\mu})$.

15. Sea $H = L^2(X, \mu)$, sea $k \in L^2(X \times X)$ y $K \in \mathcal{L}(H)$ el operador integral con núcleo k.

   a) Si $k_i \to k$ en $L^2(X \times X)$, entonces $K_i \to K$ en $\mathcal{L}(H)$.

   b) K es compacto (sug: $k = \sum_{n,m} \alpha_{nm} f_n f_m$).

   c) Si $\alpha_{nm} = 0$ para $n \neq m$, probar que los α_{nn} son autovalores de K y las f_n autofunciones, en particular $\sigma(K) \subset \ell^2$.

16. Un operador es *cuasi-nilpotente* si $\sigma(A) = \{0\}$. Probar que $A : \ell^2 \to \ell^2$ dado por $A(x_1, x_2, \cdots) = (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, \ldots, \frac{x_n}{2^n}, \ldots)$ es cuasi-nilpotente.

17. Sea $V \subset \sigma(A)$ componente conexa del operador acotado $A \in \mathcal{L}(E)$, sea P el proyector espectral de asociado a V, y $F = \operatorname{Ran} P$. Si $A_V \in \mathcal{L}(F)$ denota la restricción de A, probar que $\sigma(A_V) = V$. En particular, si $0 \notin V$, entonces A_V es inversible.

18. Sea V el operador de Volterra $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ dado por $V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Probar que V es compacto, que $\sigma(V) = \{0\}$ y que $\ker V = \{0\}$.

    Probar que para $a > 0$, $S_a = \{f \in L^2 : f|_{[0,a]} = 0\}$ es subespacio invariante de V.

19. Si $K \in \mathcal{L}(E)$ es compacto, y $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$, sea P_λ el proyector espectral de K asociado a λ, $E_\lambda = \mathrm{Ran} P_\lambda$. Probar que

    a) $\dim E_\lambda < \infty$.

    b) K restringido a E_λ es inversible y su espectro es $\{\lambda\}$.

    c) K admite una descomposición en bloques de Jordan como la de las matrices, en particular existe $n = n(\lambda) > 0$ tal que $E_\lambda = \ker(K - \lambda)^n$.

20. Sean $A, B \in \mathcal{L}(E)$ con A compacto. Probar que para cada $\lambda \in \sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$, la multiplicidad de λ como autovalor de AB coincide con la de BA *(sug: probar que por restricción,* $B : \ker(AB - \lambda) \to \ker(BA - \lambda)$ *es biyectivo).*

21. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathcal{L}(E)$, decimos que f *analítica* si es derivable en Ω.

    a) Probar que si f es analítica, entonces f' es localmente acotada en Ω *(sug: para cada* $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$, $g = \varphi \circ f$ *es holomorfa en* Ω, *luego usar el PAU).*

    b) Probar que si f es analítica entonces es continua.

    c) Probar que f es analítica si y solo si $\varphi \circ f$ es holomorfa para toda $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$ *(sug: probar que vale la fórmula de Riesz a valores en* $\mathcal{L}(E)$ *para* f*).*

    d) Probar que la resolvente $R_A(\lambda)$ de un operador acotado A, es analítica en $\Omega = \sigma(A)^c$.

22. Sea $(A_n)_n \subset \mathcal{L}(E)$, y supongamos que para toda $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \varphi(A_n) z^n$ es convergente en $|z| < R$. Probar que la serie $f(z) = \sum_{n\geqslant 1} A_n z^n$ es convergente en $||A|| < R$ y f es holomorfa alli *(sug: definir* $f(z)(\varphi) = \varphi(f(z))$ *y usar el PAU).*