Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2017

Práctica 4

Operadores compactos y de Fredholm.

En esta guia, E, F denotan espacios de Banach.

1. Sea E de dimensión infinita. Entonces

   a) $Id : E \to E$ no es compacto.

   b) Si $T \in \mathcal{K}(E, F)$, entonces T no es inversible.

2. Sea $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Entonces $\forall\ x_n, x \in E$ tales que $x_n \xrightarrow{\omega} x$ se verifica que $T(x_n) \to T(x)$. Probar que si $E = F$ es reflexivo, entonces estas condiciones son equivalentes.

3. Sea $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Probar que

   a) $\operatorname{Ran} T$ es separable.

   b) Si existe $S \subset \operatorname{Ran}(T)$ subespacio cerrado entonces $\dim S < \infty$.

   c) Si $\operatorname{Ran}(T)$ es cerrado entonces $\dim \operatorname{Ran}(T) < \infty$.

   d) Si $\dim E = \infty$, entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ tal que $\|x_n\| = 1 \quad \forall n$ y $Tx_n \to 0$ (*sug.: T acotado inferiormente $\Rightarrow$ Ran(T) cerrado).*

4. Sea E reflexivo y separable. Probar que todo operador $T \in \mathcal{L}(E, \ell^1)$ es compacto.

5. a) Si $T \in \mathcal{L}(\ell^2, \ell^1)$ entonces T es compacto.

   b) Sea $i : \ell^1 \to \ell^2$ la inclusión. ¿Es i compacta?

   c) Probar que la inclusión $i : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$ es compacta.

6. Sean $k \in C([a, b] \times [a, b])$ y $K : C[a, b] \to C[a, b]$ el operador integral con núcleo k,

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y)\, dy.$$

   Probar que K es un operador lineal compacto *(sug.: Arzela-Ascoli)*.

   ¿Qué sucede si se reemplaza $[a, b]$ por $\overline{U}$ con U abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$?

7. Probar que el operador de Volterra $V : C[0, 1] \to C[0, 1]$ dado por $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$ es compacto.

8. Probar que para cada $g \in L^2[0, \pi]$, la ecuación $f(x) - \int_0^\pi \operatorname{sen}(x + y) f(y) dy = g(x)$ tiene solución $f \in L^2[0, \pi]$.

9. Probar que si $K : E \to E$ es compacto, entonces $(1 - K)^n$ tiene núcleo de dimensión finita, para cada $n \in \mathbb{N}$.

10. Sean $R, T : E \to E$ operadores de Fredholm. Probar que

    a) T' es de Fredholm en E' y además $\operatorname{ind}(T') = -\operatorname{ind}(T)$.

    b) Si $\dim(\ker(T')) = 0$ entonces para cada $y \in E$ la ecuación $Tx = y$ tiene solución.

c) Si $K : E \to E$ es compacto entonces $1 + K$ es Fredholm.

d) Si $A : E \to E$ es inversible entonces AT, TA son de Fredholm y además $\mathrm{ind}(AT) = \mathrm{ind}(TA) = \mathrm{ind}(T)$.

e)* RT, TR son de Fredholm y además $\mathrm{ind}(RT) = \mathrm{ind}(TR) = \mathrm{ind}(T) + \mathrm{ind}(R)$.

11. Considerar $S : \ell^2 \to \ell^2$ el operador Shift y T su inverso a izquierda,

    a) Mostrar que son operadores de Fredholm y calcular sus índices.

    b) Mostrar que S^k y T^k también son operadores de Fredholm y calcular sus índices.

    c) Sea $T : E \to E$ un operador de rango finito ¿Es T un operador de Fredholm?

    d) Sea $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de Volterra por $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$. ¿Es V un operador de Fredholm?

12. (Espacio de Hardy). Sea $H = L^2(\mathbb{T})$, con $\mathbb{T}$ la circunferencia unitaria. Consideramos la descomposición en coeficientes de Fourier de $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)z^n \in H$ dada por

    $$H^+ = \{f \in H : \hat{f}(n) = 0\, \forall n < 0\}, \quad H^- = \{f \in H : \hat{f}(n) = 0\, \forall n \geq 0\}.$$

    Denotamos $H^+ = H^2(\mathbb{T})$ el *espacio de Hardy*. Probar que ambos subespacios son cerrados y ortogonales, que $H = H^+ \oplus H^-$, y que toda función $\varphi \in C(T)$ es límite uniforme de polinomios trigonométricos.

13. (Operadores de Hankel) Sean $P_+, P_- \in \mathcal{L}(H)$ los proyectores ortogonales con rango H^+, H^- respectivamente. Si y $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ está acotada, entonces el *operador de Hankel* $H_\varphi : H^+ \to H^-$ está dado por $H_\varphi = P_- M_\varphi|_{H^+}$. Probar que

    a) Si $k \in \mathbb{K}$, y $\varphi(z) = z^k$, entonces el rango de H_φ está contenido en el subespacio de dimensión finita $\langle z^j \rangle_{j=-k,\dots,-1}$.

    b) Probar que H_φ es compacto para toda φ continua.

14. (Operadores de Toeplitz). Si $\varphi \in C(\mathbb{T})$, el *operador de Toeplitz* $T_\varphi : H^+ \to H^+$ está dado por $T_\varphi = P_+ M_\varphi|_{H^+}$. Probar que

    a) Si φ no se anula, T_φ es un operador de Fredholm *(sugerencia: probar que* $T_\varphi T_{1/\varphi} = P_+ - P_+ M_\varphi H_{1/\varphi} = 1 + K$*)*.

    b) Si $k \in \mathbb{Z}$ y $\varphi(z) = z^k$, entonces $\mathrm{ind}(T_\varphi) = -k$.