Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2017

Práctica 3

Teorema de Alaoglu - PAU - Teoremas de la función abierta y gráfico cerrado

En esta guia, E, F denotan espacios normados.

1. Definamos $\varphi_n : E \to \mathbb{C}$ por $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots) = x_n$.

   a) Si $E = \ell^2$ probar que $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} 0$. ¿$\varphi_n \to 0$?

   b) Si $E = \ell^\infty$ probar que $\varphi_n \in B_{E'}, \forall n \in \mathbb{N}$ pero que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión ω^*-convergente. ¿Contradice esto el hecho de que $(B_{E'}, \omega^*)$ es compacta?

2. Sea $J : E \to E''$ la inclusión canónica,

   a) Probar que J es un homeomorfismo entre E_ω y $J(E)$ (este último con la topología ω^*).

   b) Probar que si E es Banach, $J(B_E)$ es cerrado en norma en $B_{E''}$, y que E es reflexivo si y solo si vale la igualdad $J(B_E) = B_{E''}$.

3. Probar que si E es reflexivo, toda $f : B_E \to \mathbb{R}$ que sea ω-continua alcanza máximo y mínimo en B_E.

4. Probar que si E es reflexivo, toda sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ acotada tiene una *subsucesión* ω^* convergente.

5. Sean $\varphi_n, \varphi \in E'$ con E espacio de Banach y $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} \varphi$. Entonces $(\|\varphi_n\|)_n \subset \mathbb{R}$ es acotado y además $\|\varphi\| \leqslant \liminf_n \|\varphi_n\|$.

6. Sea E un espacio normado, sean $x_n, x \in E$ tales que $x_n \xrightarrow{\omega} x$. Probar que $(\|x_n\|)_n$ es acotado y que $\|x\| \leqslant \liminf_n \|x_n\|$ *(sug: usar la inclusión canónica en el bidual).*

7. Sean $x_i, x \in E$ un Banach, $\varphi_i, \varphi \in E'$. Si $\varphi_i \xrightarrow{\omega^*} \varphi$ y $x_i \to x$ entonces $\varphi_i(x_i) \to \varphi(x)$.

8. Sea E reflexivo, $A \subset E$ ω-cerrado. Entonces A es ω-compacto sii A es acotado en norma.

9. Si $x_i, x \in E$, $\varphi_i, \varphi \in E'$. Si $x_i \xrightarrow{\omega} x$ y $\varphi_i \to \varphi$ entonces $\varphi_i(x_i) \to \varphi(x)$.

10. Sean E, F Banach, $\beta : E \times F \to \mathbb{K}$ bilineal. Probar que β es continua si y solo si es continua en cada variable.

11. Sean H un espacio de Hilbert, $\{e_n\}_n$ una b.o.n. de H. Probar las siguientes afirmaciones:

    a) $e_n \xrightarrow{\omega} 0$.

    b) Si $x_n \xrightarrow{\omega} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$ entonces $x_n \to x$.

    c) $x_n \xrightarrow{\omega} x$ si y solo si $(x_n)_n$ está acotada y $\langle x_n, e_m \rangle \xrightarrow{n} \langle x, e_m \rangle \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

12. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert H, son equivalentes:

    a) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge débilmente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge.

13. Probar que si E, F son Banach y $T_n x$ es de Cauchy para cada $x \in E$, entonces existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\textsc{sot}\text{-}\lim_n T_n = T$.

14. Sean E y F espacios normados, E completo, sea $T_n \in \mathcal{L}(E, F)$. Si para cada $x \in E$ la sucesión $(T_n x)_n$ es ω acotada en F, entonces $(\|T_n\|)_n$ está acotada. Y si $T_n x$ es ω convergente, entonces existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T = \textsc{wot}\text{-}\lim_n T_n$.

15. Sea H espacio de Hilbert, $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(H)$ tal que para todo $x, y \in H$, la sucesión $\langle y, T_n x\rangle$ es convergente.

    a) Probar que $B(x, y) = \lim_n \langle T_n x, y\rangle$ es continua usando el ejercicio anterior.

    b) Probar que existe $T \in \mathcal{L}(H)$ tal que $\textsc{wot}\text{-}\lim_n T_n = T$ usando el T. de Riesz.

16. *Operadores de multiplicación.* Sea (X, μ) espacio de medida finita, para cada $\varphi : X \to \mathbb{C}$ medible definimos el operador lineal $M_\varphi f = \varphi f$. Dado $1 \leqslant p < \infty$, probar

    a) $M_\varphi : L^p(X, \mu) \to L^p(X, \mu)$ está bien definido si y solo si es acotado (*sug.: teorema del gráfico cerrado*).

    b) M_φ es acotado sii $\varphi \in L^\infty(X, \mu)$ *(sug.: si φ no estuviese acotada p.p. considerar los conjuntos* $\{x : |\varphi(x)| \geqslant n\}$).

    c) $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ *(sug.: para ver $\|M_\varphi\| \geqslant \|\varphi\|_\infty$ considerar primero* $\varphi \geq 0$).

    d) M_φ es inyectivo sii $\varphi \neq 0$ p.p., y es inversible sii es inyectivo y $1/\varphi \in L^\infty$.

    e) Dadas $\varphi_n, \varphi \in L^\infty$, probar que $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} \varphi$ si y solo si, para algún $1 \leqslant p < \infty$

$$M_{\varphi_n}(f) \xrightarrow{\omega} M_\varphi(f) \qquad \forall f \in L^p.$$

17. Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, probar que

$$\begin{array}{llcl@{\qquad}llcl} i) & \mathrm{Ran}(T)^\perp & = & \ker(T') & ii) & {}^\perp\mathrm{Ran}(T') & = & \ker(T) \\ iii) & \overline{\mathrm{Ran}(T)} & = & {}^\perp\ker(T') & iv) & \mathrm{Ran}(T') & \subset & \ker(T)^\perp. \end{array}$$

    Si E, F son completos y $\mathrm{Ran}(T)$ es cerrado, entonces $\mathrm{Ran}(T')$ es cerrado y $\mathrm{Ran}(T') = \ker(T)^\perp$.

18. En cada uno de los siguientes casos, probar que el operador T es continuo, caracterizar T' y calcular su norma ($\Omega \subset \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ abiertos y $1 \leqslant p \leqslant \infty$).

    a) $T : \ell^2 \to c_0$, $x \mapsto x$.

    b) $T : L^p(\Omega) \to L^p(\hat{\Omega})$, $f \mapsto \hat{f}$ donde $\hat{f}$ es f extendida por 0.

    c) $T : L^p(\hat{\Omega}) \to L^p(\Omega)$, $f \mapsto f|_\Omega$.

    d) $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $T = M_\varphi$ para $\varphi \in L^\infty(\Omega)$.

    e) $T : L^p[0,1] \to L^p[0,1]$, $f \mapsto \int_0^x f(t)dt$ el *operador de Volterra*

    f) $S, T : \ell^p \to \ell^p$ los shifts a derecha e izquierda respectivamente.

19. Para $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, y α un multi-índice, definimos su *convolución* como $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$. Probar que

a) $f * g = g * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

b) $\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f * g) = (f * \partial^\alpha g)$ y $\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\, dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx\right)$

c) $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n/2} (\widehat{f} * \widehat{g})$, $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}\ \widehat{g}$

d) $(f * g) * h = f * (g * h)$,

e) $C_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dado por $C_f(g) = f * g$ es lineal y continuo.

20. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, probar que

a) $\widehat{f}$ es uniformemente continua,

b) si $\widehat{f} = \widehat{g}$ entonces $f = g$ en casi todo punto,

c) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}\ \widehat{g}$.