Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2017

Práctica 2

Espacio dual, Teoremas de Hahn-Banach, Topologías duales

En esta guia, E denota un espacio vectorial localmente convexo y $p_\alpha(\cdot) = \|\cdot\|_\alpha, \alpha \in I$, denota una familia de seminormas que define la topología de E. Además E_ω denota E con la topología débil.

1. Sea $A \subset E$, y $(\mu_n)_n \subset \mathbb{K}$ tal que $\mu_n \to 0$. Entonces

   a) A es acotado si y solo si para toda sucesión $(x_n)_n \subset A$, $\mu_n x_n \to 0$ en E.

   b) El único subespacio acotado de E es $S = \{0\}$.

2. Sea $x \in E$ metrizable, d la métrica inducida por las seminormas. Probar que

   a) $d(nx, 0) \leq nd(x, 0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

   b) si $x_n \to 0$ en E, $\exists$ una sucesión $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim_n \lambda_n = +\infty$ y $\lambda_n x_n \to 0$,

   c) $f : E \to \mathbb{K}$ lineal, es continua si y solo si manda conjuntos acotados en conjuntos acotados, "f es acotada".

3. Sean E, F localmente convexos, sea $B : E \times F \to \mathbb{K}$ bilineal.

   a) B es continua si y solo si existen p seminorma continua en E (resp. q seminorma continua en F) tales que $|B(x, y)| \leq p(x)q(y)$ para todo $x \in E, y \in F$.

   b) Si $E = F = c_{(0)}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, $B(x, y) = \sum_n x_n y_n$, entonces B es continua en cada variable pero no es continua.

4. Sea $S \subset E$ subespacio no denso. Entonces existe $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$ tal que $\varphi|_S \equiv 0$ *(sug.: usar el ejercicio del cociente de la guia 1)*.

5. Sea $(x_i)_i \subset E$. Un punto y_0 está en la clausura del subespacio generado por los x_i si y sólo si $\forall \varphi \in E'$ que verifique que $\varphi(x_i) = 0$ $\forall i$, vale que $\varphi(y_0) = 0$.

6. *a*) Sea E normado con E' es separable, probar que E es separable *(sug.: si $(\varphi_n)_n$ es denso en E', tomar $x_n \in B_E$ tal que $|\varphi_n(x_n)| \geq 1/2\|\varphi_n\|$ y ver que el subespacio generado es denso en E).*

   b) Dar un ejemplo de E normado separable tal que E' no sea separable.

7. Si $\varphi, \psi \in E'$ son tales que $\varphi\psi \equiv 0$, entonces $\varphi \equiv 0$ ó $\psi \equiv 0$.

8. Si $S \subset E$ es subespacio cerrado, y tiene dimensión o codimensión finita, es complementado (con suplemento cerrado).

9. Si $S \subset E$, el *anulador* de S es el conjunto $S^\perp = \{\varphi \in E' : \varphi(x) = 0\ \forall x \in S\}$. Si S es subespacio, probar que $\overline{S} = \cap\{\ker(\varphi) : \varphi \in S^\perp\}$.

10. Sea $x \in E$ un espacio normado, $\varphi \in E'$, $\|\varphi\| = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Probar que:

    a) Si $y \in E$, entonces $|\varphi(y)| = \operatorname{dist}(y, \ker\varphi)$.

    b) Si $H = \{y \in E : \operatorname{Re}\varphi(y) = \lambda\}$ entonces $\operatorname{dist}(x, H) = |\operatorname{Re}\varphi(x) - \lambda|$ *(sug: dado $\varepsilon > 0$, considerar $h = x - (Re\,\varphi(x) - \lambda)\, x_0\, \varphi(x_0)^{-1}$, donde $x_0 \in E$ es unitario tal que $\varphi(x_0) > 1 - \varepsilon$).*

c) Sea $C \subset E$ convexo tal que H separa x de C, entonces $\operatorname{dist}(x,H) \leqslant \operatorname{dist}(x,C)$.

11. Sea $C \subset E$ convexo en E normado, $x \notin \overline{C}$, $B = \{b \in E : \|b - x\| < \operatorname{dist}(x,C)\}$, $\varphi \in B_{E'}$ que separa B de C, $\lambda = \sup_{c \in C} \operatorname{Re} \varphi(c)$, H como en el ejercicio anterior.

    a) Probar que $\operatorname{dist}(x,C) = \operatorname{dist}(x,H)$ *(sug: para todo entorno de $h \in H$ existen puntos a ambos lados de H).*

    b) Si $c_0 \in C$ es *minimizante* (verifica $\|x - c_0\| = \operatorname{dist}(x,C)$) entonces $\operatorname{Re}\varphi(c_0) = \lambda$.

12. Sea $C \subset E$ normado con C convexo y $x \notin \overline{C}$. Entonces

    a) $c_0 \in C$ es minimizante para x si y solo si existe $\varphi \in E'$ tal que

    $$\varphi(x - c_0) = \|x - c_0\| \ \wedge \ \operatorname{Re}\varphi(c_0) = \sup \operatorname{Re}\varphi(C).$$

    b) Si C es un subespacio, entonces $\varphi \in C^{\perp} = \{\psi \in E' : \psi(c) = 0 \ \forall c \in C\}$ y además

    $$\operatorname{dist}(x,C) = \text{máx} \operatorname{Re}\psi(x) = \text{máx} |\psi(x)|$$

    donde el máximo se toma sobre $\{\psi \in C^{\perp} : \|\psi\| = 1\}$.

13. Sean $f \in L^p(X,\mu)$ con $1 < p < \infty$ y S un subespacio.

    a) $g_0 \in S$ realiza la distancia a $f \iff \int_X g\,|f - g_0|^{p-1}\,\overline{\operatorname{sgn}(f - g_0)}\,d\mu = 0 \ \forall g \in S$.

    b) f es *p-ortogonal* a S (o sea $\|f\|_p = \operatorname{dist}(f,S)$) $\Leftrightarrow \int_X g\,|f|^{p-1}\,\overline{\operatorname{sgn} f}\,d\mu = 0 \,\forall g \in S$.

14. Si $x \in E$ normado entonces la norma se alcanza con una funcional del dual,

    $$\|x\| = \text{máx}\{|f(x)| : f \in E', \ \|f\| = 1\}.$$

15. Sea E un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio. Sean $x_0 \notin \overline{S}$ y denotemos $d = \inf_{y \in S} \|x_0 - y\| > 0$. Probar que existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x_0) = 1, \|\varphi\| = 1/d, \varphi\,|_S \equiv 0$.

16. Probar que existe una funcional lineal continua $\varphi : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ con $\|\varphi\| = 1$ tal que:

    a) Si $x \in \ell^\infty$ y $T(x) = (x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots)$, entonces $\varphi(x) = \varphi(Tx)$.

    b) Si $x \in c$, entonces $\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} x_n$.

    c) Si $x \in \ell^\infty$ y $x_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $\varphi(x) \geq 0$.

    Sug.: definir φ en el subespacio $S \oplus \langle(1,1,\dots,1,\dots)\rangle$, siendo $S = \{x - T(x) : x \in \ell^\infty\}$.

17. Sea E un espacio normado reflexivo, $\varphi \in E'$, $S \subset E'$ subespacio cerrado propio.

    a) Probar que $\exists x \in E, x \neq 0 \ / \ \varphi(x) = \|\varphi\|\,\|x\|$.

    b) $\exists x \in {}^{\perp}S = \{x \in E : \psi(x) = 0, \forall \psi \in S\}$ tal que $\|x\| = 1$, $\varphi(x) = \operatorname{dist}(\varphi, S)$.

18. a) Si $f_1, \dots, f_n, f : E \to \mathbb{C}$ son lineales y $\cap_{i=1}^n \ker(f_i) \subset \ker(f)$, entonces $f \in \langle\{f_i\}_i\rangle$.

    b) Si $f : E' \to \mathbb{C}$ es lineal y ω^*-continua, entonces $\exists x \in E$ tq $f(\varphi) = \varphi(x) \ \ \forall \varphi \in E'$.

19. Sean $x_i, x \in E$. Probar que si $x_i \to x$ entonces $x_i \xrightarrow{\omega} x$, y que si $\dim E < \infty$, entonces ambas convergencias son equivalentes.

20. Sean $\varphi_i, \varphi \in E'$. Entonces $\varphi_i \to \varphi \Rightarrow \varphi_i \xrightarrow{\omega} \varphi \Rightarrow \varphi_i \xrightarrow{\omega^*} \varphi$, y si $\dim E < \infty$, las tres convergencias son equivalentes.

21. Sea $C \subset E$ convexo. Probar que:

    a) $\overline{C} = \overline{C}^{\omega}$, donde el último denota la clausura débil de C.

    b) Si $x_n \xrightarrow{\omega} x$ entonces existe una sucesión de combinaciones convexas de $\{x_n\}$ que tiende fuertemente a x.

    c) Si C es balanceado y tiene interior no vacio, entonces $0 \in \operatorname{int}(C)$. *Sug.: probar que* $1/2W \subset C$ *es entorno de* 0 *si* $x_0 + W \subset C$ *es entorno de* x_0.

22. Probar que si E_ω admite una norma continua, entonces $\dim E < \infty$.

23. Sea $B = \bigcap_\alpha \{x \in E : \|x\|_\alpha < 1\} \subset E$.

    a) Probar que B es convexo, balanceado, y que es acotado en E_ω.

    b) Probar que si E tiene dimensión infinita, B tiene interior vacío en E_ω. *En particular, la bola de un normado de dimensión infinita tiene interior vacío en la topología débil.*

24. Si $1 \le p < \infty$, en ℓ^p, sea e^n dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$. Probar que:

    a) Si $1 < p < \infty$, $e^n \xrightarrow{\omega} 0$, $e^n \not\to 0$.

    b) Si $p = 1$, $e^n \xrightarrow{\omega^*} 0$, $e^n \overset{\omega}{\not\to} 0$, $e^n \not\to 0$.

25. Sean $1 < p < \infty$, $x^n, x \in \ell^p$. Entonces $x^n \xrightarrow{\omega} x \Leftrightarrow \sup_n \|x^n\|_p < \infty \wedge \lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \ \forall k$.

26. *a*) Si $1 < p < \infty$, $\varphi_n, \varphi \in L^p[0,1]$. Entonces $\varphi_n \xrightarrow{\omega} \varphi$ si y solo si

$$\sup_n \|\varphi_n\|_p < \infty \ \wedge \ \int_0^a \varphi_n(t)\,dt \to \int_0^a \varphi(t)\,dt \quad \forall a \in [0,1].$$

    b) Si $\varphi_n(t) = \sin(n\pi t) \in L^2[0,1]$, probar que $\varphi_n \xrightarrow{\omega} 0$ pero $\varphi_n \not\to 0$.

27. $C[0,1]$ es cerrado en $L^\infty[0,1]$ en $\| \ \|_\infty$ pero no en la topología ω^*.

28. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varphi_n : c_0 \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi_n(x) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

    a) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in c_0'$ y calcular su norma.

    b) Probar que $\varphi_n \overset{\omega^*}{\to} 0$ y que $\varphi_n \overset{\omega}{\not\to} 0$.

    c) $c_0 \supset {}^\circ\langle\{\varphi_1\}\rangle \supset {}^\circ\langle\{\varphi_1, \varphi_2\}\rangle \supset \ldots \supset {}^\circ\langle\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}\rangle$ y son todos isométricamente isomorfos entre sí. ¿Ocurre lo mismo con ${}^\circ\langle\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty\rangle$?

29. Si $T \subset E'$, el *preanulador* de T es el conjunto ${}^\perp T = \{x \in E : \varphi(x) = 0 \ \forall \varphi \in T\}$. Si T es subespacio probar que $({}^\perp T)^\perp = \overline{T}$, donde la clausura es en la topología ω^*.