Análisis Funcional - 1° cuatrimestre de 2017

Práctica 1

Espacios de Hilbert, Banach y Fréchet

La base está.

En estas guias, $\mathbb{K}$ denota el cuerpo base, y en todos los casos, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Sea E un espacio vectorial y $B \subset E$ convexo que contiene a $0 \in E$ tal que:

   i. Si $x \in B$ y $|\lambda| \leqslant 1$, entonces $\lambda x \in B$ (B es *balanceado* o *equilibrado*),

   ii. Para todo $x \in E$, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \in B$ (B es *absorbente*),

   Definimos $p_B(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 : x \in \lambda B\}$, y definimos

   $$B_0 = \{x \in E : p_B(x) < 1\}, \quad \overline{B_0} = \{x \in E : p_B(x) \leqslant 1\}.$$

   a) Probar que p_B es una seminorma, y $B_0 \subset B \subset \overline{B_0}$.

   b) Probar que p_B es una norma si y solo si B no contiene semirrectas.

   c) Probar que $B = B_0$ (resp. $B = \overline{B_0}$) si y solo si B tiene la propiedad

   $$1 \leqslant \lambda_n, \lambda_n \to 1 \text{ y } \lambda_n x \in B^c \ \forall\, n \in \mathbb{N} \implies x \in B^c$$
   $$(\text{respectivamente } 0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1, \lambda_n \to 1 \text{ y } \lambda_n x \in B \ \forall\, n \in \mathbb{N} \implies x \in B).$$

   d) Si E es un e.v.t. y B es abierto, entonces $B = \{x \in E : p_B(x) < 1\}$.

2. Sea E espacio vectorial y $p_\alpha : E \to \mathbb{R}$ seminorma, para $r > 0$ definimos

   $$U_\alpha = \{x \in E : p_\alpha(x) < 1\}, \quad U_{\alpha,r} = \{x \in E : p_\alpha(x) < r\}.$$

   a) Probar que $|p_\alpha(x) - p_\alpha(y)| \leqslant p_\alpha(x - y)$ y que $\ker p_\alpha = \{x \in E : p_\alpha(x) = 0\}$ es un subespacio.

   b) Probar que $U_{\alpha,r}$ es convexo, balanceado y absorbente, y que si tomamos $B = U_\alpha$ como en el Ejercicio 1, entonces $p_B = p_\alpha$ (y luego $B_0 = B = U_\alpha$).

3. *a*) Sea E un espacio vectorial. Probar que posee una base algebraica.

   b) Probar que a todo espacio vectorial se lo puede normar.

   c) Probar que un espacio de Banach tiene dimensión finita si y solo si todo subespacio es cerrado.

   d) Probar que todo espacio vectorial de dimensión infinita posee dos normas no equivalentes.

4. *a*) Sean H espacio de Hilbert, $D \subset H$ un subconjunto. El subespacio generado por D es denso en H si y sólo si se verifica

   $$\langle x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in D \Rightarrow x = 0.$$

   b) En ℓ^2 sea $S = \left\{x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\right\}$. Probar que S es denso en ℓ^2.

5. Sea $\{x_n\}_n$ una b.o.n de H espacio de Hilbert e $\{y_n\}_n$ una sucesión ortogonal tal que

   $$\sum_{n\geq 1} \|x_n - y_n\|^2 < 1.$$

   Probar que el subespacio generado por $\{y_n\}_n$ es denso.

6. Sea $x \in H$ un Hilbert y $A \subset H$ convexo y cerrado, $d = \mathrm{dist}(x, A) \geq 0$.

   a) Probar usando la ley del paralelogramo que para todo $a, b \in A$ y $x \in H$,

$$\|a-b\|^2 = 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 - 4\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 \leqslant 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 - 4d^2.$$

   b) Probar que existe un único $a_0 \in A$ que realiza la distancia $d(x, A)$, esto es $\|a_0 - x\| \leqslant \|a - x\|$ para todo $a \in A$. ¿Esta afirmación vale en espacios de Banach?

7. Si E es un espacio vectorial normado, E es de Banach si y solo si $\forall (x_n)_n \subset E$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ implica que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en E.

Observación: Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^k$ un multi-índice con $|\alpha| = \sum \alpha_i$, y una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, denotamos con $\partial^\alpha f = \frac{\partial^j f}{\partial x_{\alpha_1} \cdots \partial x_{\alpha_k}}$.

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ región acotada. Probar que los siguientes espacios son de Banach.

   a) $C^k(\overline{\Omega})$ $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha f\|_\infty \quad (k \in \mathbb{N})$.

   b) $Lip(\overline{\Omega})$ $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y \in \Omega} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}$.

   c) $C^\alpha(\overline{\Omega})$ $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y \in \Omega} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. ¿Qué sucede si $\alpha > 1$?

   d) $BV[0,1]$ $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| : \ 0 = a_0 < \cdots < a_n = 1\right\}$.

9. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado.

   a) Probar que E/S es un espacio vectorial con $[x] + [y] := [x+y]$ y $\lambda[x] := [\lambda x]$.

   b) En E/S, sea $\|[x]\| = \mathrm{dist}(x, S)$, probar que está bien definida y que es norma.

   c) Si $\pi : E \to E/S$ es la proyección $\pi(x) = [x]$, ver que π es lineal, y que $\|\pi\| \leqslant 1$.

   d) Probar que E/S es un espacio de Banach.

   e) Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\forall x \notin F$ $\exists y_0 \in F$ que realiza la distancia, o sea

$$\|x - y_0\| = \mathrm{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

10. Probar que en ℓ^∞ / c_0 la norma de $[x]$ coincide con $\limsup\limits_{n \to \infty} |x_n|$.

11. a) Buscar subespacios cerrados S y T en un espacio de Banach E tales que $S \oplus T$ no sea cerrado.

    b) Sean un espacio de Banach E, un subespacio cerrado S y un subespacio de dimensión finita T. Probar que $S + T$ es cerrado.

    c) Sean S y T subespacios cerrados y ortogonales de un espacio de Hilbert H. Probar que $S \oplus T$ es cerrado.

12. Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, sea $c_{(0)} = \{(x_n)_n \in \ell^p : x_n = 0$ salvo para finitos $n\}$. Probar que $c_{(0)}$ es un subespacio de ℓ^p no cerrado y además

a) $c_{(0)} \subset \ell_p$ es denso si y solo si $p < \infty$,

b) calcular la clausura de ℓ_p en ℓ_∞ (con la norma infinito).

13. Sea E espacio normado y $p : E \to \mathbb{R}$ una seminorma. Probar que p es continua si y solo si $\|p\| = \sup_{x\in B_E} |p(x)| < \infty$, y en ese caso $p(x) \leq \|p\| \|x\|$ para todo $x \in E$.

14. Sea $S \subset E$ subespacio propio de un e.l.c., entonces $\mathrm{int}(S) = \emptyset$.

    Observación: de aquí en más $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ denota una región (puede ser $\Omega = \mathbb{R}^n$) y $K_n \subset int(K_{n+1}) \subset \Omega = \cup_n K_n$ una familia numerable y creciente de compactos.

15. *Funciones continuas*. Sea $C(\Omega)$ con la familia de seminormas $p_n(f) = \sup_{x\in K_n} |f(x)|$. Probar que $C(\Omega)$ es un espacio de Fréchet.

16. *Funciones holomorfas*. Sea $\mathcal{H}ol(\Omega)$ las funciones holomorfas en $\Omega \subset \mathbb{C}$, con la familia de seminormas del ejercicio anterior. Probar que $\mathcal{H}ol(\Omega)$ es un espacio de Frechét. Probar que no es normable (*sug.: usando el teorema de Montel, probar que la bola sería compacta*).

17. *Funciones suaves*. Denotamos $\mathcal{E}(\Omega)$ al espacio $C^\infty(\Omega)$ con la familia de seminormas $p_{n,\alpha}(f) = \sup_{x\in K_n} |\partial^\alpha f(x)|$, donde α es un multi-índice. Probar que $\mathcal{E}(\Omega)$ es un espacio de Fréchet.

18. *Funciones suaves en un compacto*. Si Ω es acotado y $K = \overline{\Omega}$, sea $C^\infty(K)$ las funciones C^∞ en algún abierto $V \supset K$, y las seminormas como en el Ejercicio 17. Probar que $C^\infty(K)$ es un espacio de Fréchet, y que no es normable (*sug.: usando el Ejercicio 13 y el teorema de Arzelá, probar que la bola sería compacta*).

19. Sea $C_c^\infty(\Omega)$ las funciones C^∞ de soporte compacto en Ω. Fijado $K \subset \Omega$ compacto, llamamos $\mathcal{D}_K(\Omega) \subset C_c^\infty(\Omega)$ al subconjunto de funciones con soporte en K, con la familia de seminormas del Ejercicio 17.

    a) Probar que $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es un espacio de Fréchet, y que no es normable.

    b) Considerar $C_c^\infty(\Omega)$ con la familia de seminormas $p_{K_n,\alpha}$. Probar que es localmente convexo, pero no es completo (*sugerencia: observar que $C_c^\infty(\Omega) = \cup_n \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$, usar el teorema de Baire para llegar a un absurdo*).

20. *Funciones test*. Sea $\mathcal{D}(\Omega)$ el espacio $C_c^\infty(\Omega)$ con la topología: $V \ni 0$ es un abierto básico de $\mathcal{D}(\Omega)$ siempre que V sea convexo, balanceado, y $V \cap \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$ sea abierto básico de $\mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    a) Probar que $\mathcal{D}(\Omega)$ es localmente convexo.

    b) Usar que $\mathcal{D}(\Omega)$ es completo por sucesiones para probar que no es Fréchet.

21. *Espacio de Schwarz*. Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ el espacio de las funciones C^∞ en $\mathbb{R}^d$ tales que para todo $k \in \mathbb{N}$ y multi-índice α,

    $$p_{(k,\alpha)}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|)^k |\partial^\alpha f(x)| < \infty.$$

    Probar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tiene dimensión infinita, que es Fréchet, y que no es normable.

22. Sea $(E, (p_\alpha)_\alpha)$ un espacio localmente convexo, y $S \subset E$ un subespacio. Considerar E/S como en el Ejercicio 9 y el mapa cociente $\pi : E \to E/S$.

a) Para cada α, ver que $\widetilde{p}_\alpha(\pi(x)) = \inf_{s\in S} p_\alpha(x-s)$ está bien definido y es una seminorma que verifica $\widetilde{p}_\alpha(\pi(x)) \leqslant p_\alpha(x)$ para todo $x \in E$.

b) Probar que $(\widetilde{p}_\alpha)_\alpha$ separa puntos en E/S si y solo si $S \subset E$ es cerrado.

c) Sea $\widetilde{U}_{\alpha,r} = \{\pi(x) \in E/S : \widetilde{p}_\alpha(\pi(x)) < r\}$. Probar que $\widetilde{U}_{\alpha,r} = \pi(U_{\alpha,r})$.

d) Con S cerrado, probar que E/S es localmente convexo, y que π es abierta.

e) Con S cerrado, probar que E es completo (resp. Fréchet, separable) si y solo si $S, E/S$ son ambos completos (resp. Frechét, separables).

23. Sea $(E, (p_\alpha))$ un espacio localmente convexo, $f : E \to \mathbb{K}$ una funcional lineal o una seminorma no nula. Probar que son equivalentes:

    a) f es continua.

    b) Para todo entorno V de $0 \in \mathbb{K}$ existe $U \subset E$ entorno de 0 tal que $U \subset f^{-1}(V)$.

    c) existen $C > 0$ y *finitos* α_n tales que $|f(x)| \leqslant C \sum_n p_{\alpha_n}(x)$ $\forall x \in E$.

    d) $\ker f$ no es denso.

    e) $\ker f$ es cerrado.

    Observación: en el caso normado, la constante óptima del tercer item la denotamos $\|f\|$, y en ese caso se tiene $|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\|$ $\forall x \in E$.

24. Probar que las siguientes funcionales son lineales, continuas y hallar sus normas:

    a) $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x \in c =$ sucesiones convergentes en ℓ^∞.

    b) $\varphi(f) = \int_{-1}^{1} t f(t)\, dt$, $f \in L^2[-1,1]$, *c*) $\varphi(f) = \int_{-1}^{1} t f(t)\, dt$, $f \in C[-1,1]$.

    d) $\varphi(x) = x_1 + x_2$, $x \in \ell^\infty$, *e*) $\varphi(x) = x_1 + x_2$, $x \in \ell^p, 1 \leqslant p < \infty$.

    f) $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$, $x \in c_0$, *g*) $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$, $x \in \ell^p, 1 \leqslant p < \infty$.

    En el siguiente ejercicio $x \in K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ con K compacto y Ω región. Asimismo, α es un multi-índice y μ una medida de Borel que es finita en todos los compactos de Ω.

25. Probar que las siguientes funcionales son lineales y continuas en cada uno de los espacios $C^\infty(K), \mathcal{E}(\Omega), \mathcal{S}(\Omega), \mathcal{D}_K(\Omega), \mathcal{D}(\Omega), \mathcal{H}ol(\Omega)$:

    a) $f \mapsto \delta_x(f) = f(x)$, la *delta* de *Dirac*.

    b) $f \mapsto \partial^\alpha \delta_x(f) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha f(x)$, las *derivadas* de la *delta*.

    c) $f \mapsto \partial^\alpha g(f) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathrm{sop}(g)} g\, \partial^\alpha f$, *donde* $g \in C_c(\Omega)$.

    d) $f \mapsto \mu_K(f) = \int_K f\, d\mu$. *e*) $f \mapsto \partial^\alpha \mu_K(f) = (-1)^{|\alpha|} \int_K \partial^\alpha f\, d\mu$.

26. Probar que las siguientes son funcionales lineales continuas en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

    a) $f \mapsto H(f) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$, la fcional. *Heaviside*; probar que $H' = \delta_0$.

    b) $f \mapsto \Delta_x(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kx)$, $(x \neq 0)$ el *peine* de *Dirac*.

    c) $f \mapsto \{p.v.\frac{1}{x}\}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\, dt$, el *valor principal* de $\frac{1}{x}$.