Análisis Complejo — 1^{er} Cuatrimestre de 2017

Práctica 8: *Productos infinitos*

Notación: Notamos $\mathbb{E}$ al disco unidad, y $\mathbb{H}$ al semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$.

1. Probar que $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

2. Probar que $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + z^{2^n}\right) = \frac{1}{1-z}$ para cada $z \in \mathbb{E}$.

3. El producto $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^n)$ converge uniformemente sobre compactos en $\mathbb{E}$, y por lo tanto define una función holomorfa allí.

4. Pruebe que el producto $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 z - 1}{n^2 z + 1}$ define una función holomorfa en el semiplano $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. Encuentre sus ceros y sus multiplicidades.

5. Pruebe que $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{z}{2^n}\right)$ define una función entera. Encuentre sus ceros y sus multiplicidades.

6. Probar que $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$ define una función entera.

7. Sea $g(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$. Teniendo en cuenta que $\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi\operatorname{cotg}(\pi z)$, demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Productos de Blaschke

8. Sean $d, z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que $0 < |d| < 1$ y $|z| \leq r < 1$. Probar que

$$\left| \frac{|d|}{d} \frac{z-d}{(1-\overline{d}z)} - 1 \right| \leq 2\frac{1-|d|}{1-r}.$$

9. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión con términos no nulos en $\mathbb{E}$ que cumple la *condición de Blaschke*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty.$$

Pruebe que

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1-\overline{a_n}z}$$

define una función holomorfa $b : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$. ¿Cuáles son sus ceros?

10. Demostrar que existe una función $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ holomorfa que no se extiende de manera holomorfa a ningún abierto conexo que contenga a $\mathbb{E}$ propiamente. *Sugerencia*: use el ejercicio anterior.

11. Usando la función biholomorfa $t : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{E}$ tal que $z \longmapsto \frac{z-1}{z+1}$, encuentre una "condición de Blaschke" para una sucesión en $\mathbb{H}$, y el producto infinito correspondiente.

12. Sea $f \in \mathscr{O}(\mathbb{E})$ acotada y sean $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{E}$ ceros distintos de f. Pruebe que

$$|f(z)| \leqslant \left|\frac{z-d_1}{\bar{d}_1 z - 1}\right| \cdots \left|\frac{z-d_n}{\bar{d}_n z - 1}\right| |f|_{\mathbb{E}}$$

para cada $z \in \mathbb{E}$. Deduzca la *desigualdad de Jensen:*

$$|f(0)| \leqslant |d_1 \cdots d_n||f|_{\mathbb{E}}$$

Sugerencia: imite la demostración del lema de Schwarz.

13. Pruebe que si $f \in \mathscr{O}(\mathbb{E})$ es acotada, y si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una enumeración de sus ceros, entonces cumple la condición de Blaschke.

14. Pruebe que no existe una función holomorfa, no nula y acotada $\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ que se anula en $1 - 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.