Análisis Complejo — 1$^{\text{er}}$ Cuatrimestre de 2017

Práctica 7: *Espacios de funciones holomorfas y meromorfas*

Fijamos de ahora en adelante una región Ω , esto es, un subconjunto abierto, conexo y no vacío de $\mathbb{C}$, y notamos por $\mathscr{O}(\Omega)$ al conjunto de funciones holomorfas sobre Ω. Diremos que una sucesión de funciones *converge en* $\mathscr{O}(\Omega)$ si converge de forma localmente uniforme a alguna función $f \in \mathscr{O}(\Omega)$.

1. Pruebe que la familia de funciones $\{z \in \mathbb{C} \longmapsto nz \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en ningún entorno del origen.

2. Pruebe que las siguientes familias de funciones son localmente acotadas, y luego normales. Determine cuales de ellas son cerradas.

(i) $\{f \in \mathscr{O}(\Omega) : |f| \leqslant M\}$ donde M es una constante fija.

(ii) $\{z \in \mathbb{E} \longmapsto z^n \in \mathbb{E} : n \in \mathbb{N}\}$

(iii) $\{f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ donde $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función entera tal que la sucesión $(f^{(n)}(0))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

(iv) $\{f \in \mathscr{O}(\mathbb{E}) : |f^{(n)}(0)/n!| \leqslant M \ \forall n \in \mathbb{N}_0\}$ donde M es una constante fija.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k/(k+1)!$. Demostrar que dado $R > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale que P_n no tiene ceros reales de módulo menor que R.

4. *La función Gamma.*

(I) Sean $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $0 < s < t < \infty$. Pruebe que la función

$$z \in \mathbb{H}_+ \longmapsto f(z; s, t) = \int_s^t u^{z-1} e^{-u} \, du \in \mathbb{C}$$

es holomorfa, donde $\mathbb{H}_+$ es el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ con parte real positiva.

(II) Pruebe que la familia $\{f(z; s, t) \in \mathcal{O}(\mathbb{H}_+) : 0 < s < t < \infty\}$ es localmente acotada.

(III) Pruebe que la función $\Gamma : \mathbb{H}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ es holomorfa.

(IV) Pruebe que para todo $z \in \mathbb{H}_+$, $\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \log(t) dt$.

(V) Pruebe que $\Gamma(1) = 1$ y que para todo $z \in \mathbb{H}_+$ vale que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, y deduzca que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

5. Sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{O}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre K a $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ que es nunca nula.

(I) Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}_{\geqslant N}$ la función f_n no se anula en K y además $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ uniformemente en K.

(II) Si además $g_n \to g$ uniformemente en K, pruebe que $f_n g_n \to fg$ uniformemente en K.

6. Sea γ una lazo simple en Ω y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una función que no se anula sobre γ. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $\mathcal{O}(\Omega)$, probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}_{\geqslant n_0}$, la cantidad de ceros de f_n en $\mathrm{Int}(\gamma)$ es igual a la cantidad de ceros de f en $\mathrm{Int}(\gamma)$.

7. *Lema de Hurwitz.* Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesion en $\mathcal{O}(\Omega)$ que converge a una función f no idénticamente nula, y supongamos que existe $c \in \Omega$ tal que $f(c) = 0$. Pruebe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y una sucesión de puntos $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geqslant n_0}}$ en Ω tales que $\lim_{n \to \infty} c_n = c$ y para cada $n \in \mathbb{N}_{\geqslant n_0}$ es $f_n(c_n) = 0$.

8. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{O}(\Omega)$ que converge a una función f. Si para cada $n\in\mathbb{N}$ la función f_n es nunca nula entonces f es o bien idénticamente nula o nunca nula.

9. Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ *converge continuamente* si para cada sucesión convergente (z_n) de Ω, la sucesión $(f_n(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(I) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones $\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ que converge continuamente, entonces converge puntualmente y lo hace a una función continua sobre Ω.

(II) Una sucesion de funciones $\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ converge continuamente si y solamente si converge de forma local uniforme a una función continua.

10. Pruebe que la sucesión con término general $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ converge a exp en $\mathscr{O}(\mathbb{C})$.

11. Pruebe que toda sucesión convergente en $\mathscr{O}(\Omega)$ es localmente acotada.

12. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\mathscr{O}(\Omega)$, entonces la sucesión $(\exp f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\exp f$ en $\mathscr{O}(\Omega)$.

13. Sea $\mathscr{F}$ una familia localmente acotada $\mathscr{O}(\Omega)$. Entonces la familia de derivadas $\mathscr{F}'$ es también localmente acotada.

14. Pruebe que si la familia $\mathscr{F}'$ es localmente acotada y si $\mathscr{F}$ está acotada en al menos un punto, entonces $\mathscr{F}$ es localmente acotada.

15. Para cada $f\in\mathscr{O}(\Omega)$, definimos $L_\Omega(f)=\int_\Omega|f|^2dxdy$ y la familia de funciones $\mathscr{F}=\{f\in\mathscr{O}(\Omega):L_\Omega(f)\leqslant M\}$ donde M es una constante fija. Pruebe que $\mathscr{F}$ es normal. *Sugerencia:*

- Pruebe que si $B=B_r(c)$ es un disco contenido en Ω y si $z\in B$ entonces

$$f(z)^2=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}f(c+te^{i\theta})\,tdtd\theta=\frac{1}{\pi r^2}\int_B f^2dxdy$$

  usando la fórmula de Cauchy para f^2.

- Deduzca que $|f|_B^2\leqslant M/\pi r^2$, y luego que $\mathscr{F}$ es localmente acotada

Sucesiones de funciones meromorfas

16. Pruebe que la serie

$$\varepsilon_1(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n>0} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

converge normalmente en $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}$ y define una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos en los enteros, y que $\varepsilon_1(z) = \pi \cot \pi z$.

Sugerencia:

(i) Pruebe que ε_1 y $\pi \cot \pi$ ambas cumplen la ecuación funcional $2g(2z) = g(z) + g(z + 1/2)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $2z, z, z + 1/2 \notin \mathbb{Z}$.

(ii) Pruebe que una función entera e impar g que cumple la ecuación anterior y $g(0) = 0$ es idénticamente nula usando el principio del máximo sobre $B(0,2)$.

(iii) Aplique lo anterior a $\varepsilon_1 - \pi \cot \pi$ para concluir.

17. Calcular las sumas $\sum_{n\geqslant 1} n^{-2}$ y $\sum_{n\geqslant 1} n^{-4}$ usando los primeros términos del desarrollo de Laurent de ε_1 en torno al origen.

Nota: Si encuentra una fórmula general para los coeficientes de tal desarrollo puede encontrar el valor de $\sum_{n\geqslant 1} n^{-2k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

18. Pruebe que para cada $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, la serie

$$\varepsilon_k(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k}$$

converge normalmente y define una función meromorfa en $\mathbb{C}$ cuyo conjunto de polos es $\mathbb{Z}$.

19. Pruebe que

$$\varepsilon_2(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}.$$

Sugerencia: pruebe que ambos miembros de la igualdad son funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, periódicas de período 1, con polos de orden 2 en cada $n \in \mathbb{Z}$, en los que la parte principal es $(z-n)^{-2}$, así la diferencia entre ambos miembros es una función entera. Pruebe que esta función es acotada.

20. Use el ejercicio anterior para probar que

$$\varepsilon_3(z) = \pi^3 \frac{\cot \pi z}{\sin^2 \pi z},$$

y deduzca que $\varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2$. Las series ε_k para $k \in \mathbb{N}$ se llaman *series de Eisenstein*. *Sugerencia*: calcule la derivada de la serie ε_2.

21. * Sean ω y ω' números complejos no nulos tal que $\Im(\omega/\omega') > 0$, y enumeremos los elementos del conjunto $L(\omega,\omega') = \{n\omega + m\omega' : m, n \in \mathbb{Z}\}$ en una serie $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ donde $\omega_0 = 0$. Sea $\mathbb{C}_L = \mathbb{C} \smallsetminus L(\omega,\omega')$. La serie

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{(z-\omega_k)^2} - \frac{1}{\omega_k^2}\right)$$

es una *función $\wp$ de Weiertrass.*

(i) Pruebe que esta serie converge normalmente en $\mathbb{C}_L$, así en particular nuestra definición no depende del orden en que enumeramos los elementos de $L(\omega,\omega')$.

(ii) Calcule $\wp'$ y pruebe que $\wp'(z+\omega) = \wp'(z+\omega') = \wp'(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}_L$.

(iii) Pruebe que $\wp$ es una función par, y usando esto y el ítem anterior, que $\wp(z+\omega) = \wp(z+\omega') = \wp(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}_L$.

(iv) Pruebe que $\wp$ es meromorfa en $\mathbb{C}$ y tiene polos de orden 2 en cada punto de $L(\omega,\omega')$, y que esos son sus únicos polos.

Sugerencia: en el primer ítem, pruebe que ω y ω' son $\mathbb{R}$-linealmente independientes, y que en tal caso existe $\varepsilon > 0$ tal que $|a\omega + b\omega'| \geqslant \varepsilon\sqrt{a^2+b^2}$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

22. Sea $f(z)$ una función meromorfa con polos simples en un conjunto de puntos $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que

- $0 < |z_i| \leqslant |z_{i+1}|$ para cada $i \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$.

y sea para cada $n \in \mathbb{N}$ sea c_n el residuo de $f(z)$ en el polo z_n.

(i) Probar que existe una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente de radios positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$ y tal que f no tiene singularidades sobre ∂B_{r_n}.

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \left|z^{-1}f(z)\right|_{\partial B_{r_n}} \to 0$, pruebe que

$$f(z) = f(0) + \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\left(\frac{1}{z-z_n} + \frac{1}{z_n}\right).$$

Sugerencia: considere la sucesión de funciones $f_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial B_{r_n}} \dfrac{f(w)}{w(w-z)}\,dw$ y su límite.

(iii) Pruebe que si $\sum_{n>0} |z_n|^{-2} < \infty$ la serie del ítem anterior converge normalmente.

(iv) De un ejemplo de una función conocida para la que puede llevarse adelante esta construcción, y para la que se cumple la condición de sumabilidad del ítem anterior.