Análisis Complejo — 1$^{\text{er}}$ Cuatrimestre de 2017

Práctica 6: *series de Laurent, funciones meromorfas, y residuos.*

Notación: Si $0 < r < R$, notamos por $A_{r,R}(c)$ al anillo abierto con centro c de radio menor r y radio mayor R, y notamos por $A_r(c)$ al anillo abierto infinito de radio r centrado en c.

1. Sea $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de f en cada uno de los siguientes anillos:

(i) $0 < |z| < 1$, (iii) $2 < |z|$, (v) $1 < |z-1|$,

(ii) $1 < |z| < 2$, (iv) $0 < |z-1| < 1$, (vi) $1 < |z-2| < 2$.

2. Hallar el coeficiente de z en el desarrollo de Laurent de $\dfrac{e^z}{z-1}$ en el anillo $A_1(0)$.

3. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Mostrar que si $0 < |z| < \infty$,

$$\exp\left(\frac{\lambda}{2}(z+z^{-1})\right) = J_0(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\lambda)(z^n + z^{-n})$$

$$\text{donde } J_n(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda\cos t}\cos(nt)\,dt$$

para $n \in \mathbb{N}$. La función J_n se llama una *función de Bessel.*

4. Determinar qué tipo de singularidad tiene cada una de las siguientes funciones en el origen. Cuando esta sea evitable, definir $f(0)$ de modo que f resulte holomorfa en 0. Cuando sea un polo, determinar su orden y hallar la parte singular.

(I) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$, (IV) $\exp(z^{-1})$, (VII) $\dfrac{z^2+1}{z(z+1)}$,

(II) $\dfrac{\cos z}{z}$, (V) $\dfrac{\log(z+1)}{z}$,

(III) $\dfrac{\cos z - 1}{z}$, (VI) $z^{-1}\cos z^{-1}$, (VIII) $\dfrac{1}{1-e^z}$.

5. ¿Es 0 una singularidad esencial de la función que define la siguiente serie de Laurent?

$$\cdots + z^{-n} + z^{-n+1} + \cdots + z^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

6. Sea f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, 2i\}$. Demostrar que si f tiene una singularidad no evitable en $z = i$ y en $z = 2i$, entonces el desarrollo en serie de Laurent de f en $A_{1,2}(0)$ tiene infinitos términos negativos e infinitos términos positivos no nulos.

7. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región y $z_0 \in \Omega$, y sean $f, g : \Omega \setminus z_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas.

(I) Probar que z_0 es un cero de orden k de f si y sólo si es un polo de orden k de $1/f$.

(II) Si z_0 es un cero (polo) de orden k de f y un cero (polo) de orden k de g, ¿que clase de singularidad de f/g es z_0?

(III) Si z_0 es una singularidad esencial de f y un polo de g, decidir que tipo de singularidad tienen fg y f/g en z_0.

8. Sea z_0 una singularidad evitable, polo o singularidad esencial de la función f. Determinar en cada caso qué tipo de singularidad tiene la función $\exp f$ en z_0.

9. Sea $f = p/q$ una función racional. Decidir que tipo de singularidad tiene f en ∞ en función de los grados de p y q.

10. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en $\widehat{\mathbb{C}}$ y determinar el orden de sus polos.

(i) $\dfrac{e^z - 1 - z}{z^2}$ (iv) $\dfrac{z^5}{1+z^4}$ (vii) $\dfrac{\cos z - \operatorname{sen} z}{z^4 + 2z^2 + 1}$

(ii) $\cos z \exp(-z^{-2})$ (v) $\operatorname{sen}(z^{-2})^{-1}$

(iii) $\dfrac{1}{z^3 - 5} + z\exp(z^{-1})$ (vi) $\exp\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$ (viii) $\dfrac{1}{\cos z - 1}$.

11. Probar que una función entera tiene una singularidad evitable en ∞ si y sólo si es constante, y que tiene un polo de orden n en ∞ si y sólo si es un polinomio de grado n.

12. Hallar todas las funciones enteras y biyectivas.

13. Para cada una de las siguientes funciones, determinar sus singulares aisladas y calcular los correspondientes residuos:

(i) $\dfrac{1}{z^2(z+1)}$, (ii) $z^{-3} \operatorname{sen} z$, (iii) $z^5 \cos z^{-1}$.

14. Sea f meromorfa en un abierto Ω y sea $a \in \Omega$.

(i) Sea a un polo de orden m de f y sea $g(z) = (z-a)^m f(z)$, entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} g^{(m-1)}(z).$$

(ii) Deducir que si a es un polo simple de f entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

15. Sea f meromorfa en un abierto Ω, g holomorfa en Ω y sea $a \in \Omega$. Probar que:

(i) si a es un polo simple de f entonces

$$\operatorname{Res}(fg, a) = \operatorname{Res}(f, a) g(a),$$

(ii) si a es un cero de orden m de f entonces a es un polo simple de f'/f y

$$\operatorname{Res}(f'/f, a) = m,$$

(III) si a es un polo de orden m de f entonces a es un polo simple de f'/f y

$$\operatorname{Res}(f'/f, a) = -m,$$

(IV) si a es un cero de orden m de f entonces a es un polo simple de gf'/f y

$$\operatorname{Res}(f'g/f, a) = mg(a).$$

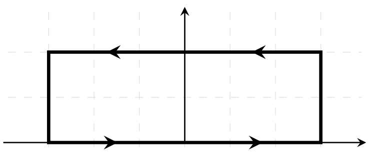
16. Calcular los siguientes residuos en los puntos indicados.

(I) $\dfrac{e^z}{(z-1)z}$ en $z = 0, 1$ (II) $\dfrac{\cos z - 1}{\operatorname{sen} z - z}$ en $z = 0$ (III) $\dfrac{z^4 e^z}{1+e^z}$ en $z = \pi i$.

17. Calcular las siguientes integrales.

(I) $\displaystyle\int_{\partial B_2} \frac{z}{z^4+1}\,dz$ (II) $\displaystyle\int_{\partial B_2} \frac{1+\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z}\,dz$ (III) $\displaystyle\int_{\partial B_2} \frac{dz}{(z+1)^2(z^2-9)}$.

18. Sea f entera y γ una curva como en la figura siguiente. Si $\displaystyle\int_\gamma z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$, probar que f no se anula en el interior de γ.



19. Sea γ el rectángulo de vértices 0, 1, $1+3i$ y $3i$ recorrido en sentido positivo, y sea f meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f(z+3i) = f(z)$ y $f(z+1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que si f no tiene polos ni ceros sobre γ, la cantidad de ceros de f en el interior de γ es igual a la cantidad de polos de f en el interior de γ contados con multiplicidad.

20. Probar que el polinomio $p(z) = 2z^5 + 7z - 1$ tiene una raíz real positiva de módulo menor que 1 y que el resto de las raíces están en $A_{1,2}(0)$.

21. Probar que el polinomio $z^5 + 15z + 1 = 0$ tiene una única raíz en el disco $B_{3/2}(0)$ y decidir si tiene alguna raíz en $\overline{A_2(0)}$.

22. Sea $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$. Probar que la ecuación $z^n e^{\alpha - z} = 1$ tiene exactamente n raíces en $B_1(0)$.

23. Calcular los residuos en ∞ de las siguientes funciones:

$$\frac{z^2}{(z-1)(z-2)}, \qquad \frac{e^{z^{-1}}}{(1+z)z}.$$

24. Calcular

(I) $\int_{\partial B_2} \frac{z^2+3z-1}{z^4-2}\,dz,$ (II) $\int_{\partial B_2} \frac{e^{z+z^{-1}}}{1-z^2}\,dz.$

25. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$. Se define en Ω la función $f(z) = \log\frac{z+1}{z-1}$, tomando la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ tal que $\log(r) \in \mathbb{R}$ para todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Calcular $\int_{\partial B_2} f(z)\,dz$.

26. Sea f holomorfa alrededor de z_0. Probar que f es inyectiva en algún entorno de z_0 si y solo si $f'(z_0) \neq 0$.

27. Sea f holomorfa e inyectiva en la bola de centro a y radio R, $B(a,R)$. Sea $0 < r < R$ y sea γ el borde de la bola de centro a y radio r. Probar que para todo $w \in f(B(a,r))$,

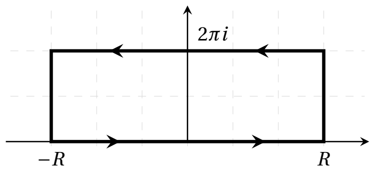
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)-w}\,dz.$$

28. Sea $f : B_r(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y no constante en tal que $f(0) = 0$. Probar que existe un entorno Ω de 0 contenido en $B_r(0)$ y $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva tal que $g(\Omega) = B_s(0)$ para algún s y $f(z) = g(z)^{o_f(0)}$ para todo $z \in \Omega$.

Cálculo de integrales reales mediante el teorema de los Residuos

An idea which can be used only once is a trick. If one can use it more than once it becomes a method. — G. Pólya y G. Szëgo.

29. Para $0 < a < 1$ calcular $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$ integrando en el siguiente rectángulo de altura $2\pi i$ y haciendo que $R \to \infty$.



30. Sea $Q : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales. Si $\lim\limits_{|z|\to\infty} zQ(z) = 0$, probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\Im(z_i)>0} \operatorname{Res}(Q(z), z_i).$$

Calcular las siguientes integrales:

(I) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{x^4+1}\,dx$, (II) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2}{x^4+1}\,dx$, (III) $\int_{0}^{\infty} \dfrac{x^2}{x^4+2x^2+1}\,dx$.

31. Sea $Q : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales. Si $\lim\limits_{|z|\to\infty} Q(z) = 0$, probar que

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)e^{ix}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} Q(x)e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{\Im(z_i)>0} \operatorname{Res}(Q(z)e^{iz}, z_i).$$

Usando lo anterior, calcular las integrales:

(I) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos x}{x^2+1}\,dx$, (II) $\int_{0}^{\infty} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx$.

32.

(i) Sea $Q:\mathbb{C}\to\widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales, excepto en el origen, donde tiene un polo simple. Si $\lim_{|z|\to\infty} Q(z)=0$, probar que

$$\lim_{\substack{R\to+\infty, r\to 0\\ r>0}} \Big(\int_{-R}^{-r} Q(x)e^{ix}dx+\int_{r}^{R} Q(x)e^{ix}dx\Big)=$$

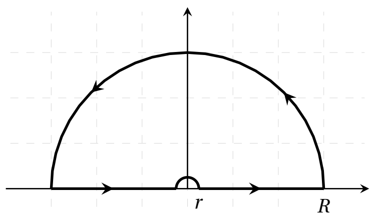
$$=2\pi i\sum_{\Im(z_i)>0}\operatorname{Res}(Q(z)e^{iz},z_i)+\pi i\operatorname{Res}(Q(z)e^{iz},0).$$

Sugerencia:integrar sobre curvas como en la figura, y hacer que $r\to 0$ y $R\to\infty$.

(ii) Probar que

$$\lim_{r\to 0}\Big(\int_{-\infty}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{r}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\Big)=\pi i$$

y deducir que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

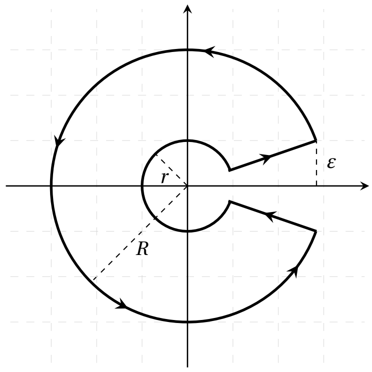


33. Para $a\in\mathbb{R}$ no nulo, probar que la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$ converge y calcular su valor. *Sugerencia*: integrar sobre curvas como en el ejercicio anterior.

34. Sea $Q:\mathbb{C}\to\widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos en $[0,+\infty)$ y sea $\alpha\in(0,1)$. Si $\lim_{z\to\infty} Q(z)=0$, probar que

$$(1-e^{-2\pi i\alpha})\int_0^{+\infty}\frac{Q(x)}{x^\alpha}dx=2\pi i\sum_{z_i}\operatorname{Res}\Big(\frac{Q(z)}{z^\alpha},z_i\Big),$$

donde la rama elegida de z^α es la obtenida tomando el argumento de z en $(0,2\pi)$. *Sugerencia*: integrar sobre curvas del siguiente tipo, y hacer que $R\to\infty$, $r\to 0$ y $\varepsilon\to 0$.



35. Calcular las siguientes integrales reales.

(I) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx$, (II) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x)}\,dx$, (III) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{x^3+x}\,dx$.

36. Sea $Q : \mathbb{C}^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional tal que el denominador no se anula sobre la circunferencia de centro 0 y radio 1. Sea $R : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ definida por

$$R(z) = \frac{1}{z} Q\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right).$$

Probar que

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos x, \operatorname{sen} x)\,dx = 2\pi \sum_{|z_i|<1} \operatorname{Res}(R(z), z_i),$$

integrando sobre el círculo unidad. Usando esto, calcular las integrales

(I) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\operatorname{sen} x}\,dx$ para $|a| > 1$

(II) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos x)^2}\,dx$ para $0 < b < a$

(III) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)}{1-2a\cos x+a^2}\,dx$ para $|a| < 1$.