Análisis Complejo — 1^er Cuatrimestre de 2017

Práctica 5: *teoremas fundamentales sobre funciones holomorfas.*

Nota: Como es costumbre fijamos Ω una región en $\mathbb{C}$. Un camino será siempre suave a trozos, excepto que digamos lo contrario.

1. Consideramos la *función de Cauchy* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si} x = 0 \end{cases}$$

Probar que es suave y que $f^{(\nu)}(0) = 0$ para todo natural ν. Concluir que f no es analítica, y luego que $f(z) = \exp(-z^{-2})$ no es holomorfa en ningún entorno del origen.

2. Sea f entera, y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$, $M > 0$ y R un número real positivo tal que $|f(z)| \leqslant M|z|^n$ para todo z tal que $|z| > R$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

3. Sea $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ no constante. Probar que la función $M : r \in \mathbb{R} \longmapsto |f|_{\partial B_r} \in \mathbb{R}$ es continua y (estrictamente) monótona creciente.

4. *Fórmula de Guntzmer.* Sea $g = \sum a_\nu z^\nu$ es una serie de potencias y sea $0 < r < R_g$. Probar que

$$\sum_{\nu \geqslant 0} |a_\nu|^2 r^{2\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^2 dt \leqslant M_g(r)^2.$$

5. Sea f entera y supongamos que existen dos números complejos z_0 y z_1, $\mathbb{R}$-linealmente independientes, tales que $f(z+z_0) = f(z)$ y $f(z+z_1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es constante.

6. *Fibras numerables.*

(i) Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa no nula. Probar que para cada $w \in \Omega$ tal que $f(w) = 0$ existen $\nu \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa que no se anula en w tales que $f(z) = (z-w)^{\nu} g(z)$ en Ω.

(ii) Con las hipótesis del ítem anterior, verificar que el conjunto de ceros de f es discreto. Deducir que en todo compacto de Ω, la ecuación $f(z) = c$ tiene sólo un número finito de ceros, y luego que cada fibra $f^{-1}(c)$ es a lo sumo numerable.

7. Decidir en cada caso si existe f holomorfa en $B(0,1)$ que cumple lo pedido.

(i) $f\left(\frac{1}{2\nu}\right) = f\left(\frac{1}{2\nu+1}\right) = \frac{1}{\nu}$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

(ii) $f\left(\frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{3-2\nu}$ para todo $\nu \in \mathbb{N}, \nu > 1$.

8. En cada caso, hallar las funciones enteras que cumplen lo pedido.

(i) Para todo $\nu \in \mathbb{N}$, $n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)^3 + f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

(ii) Para todo $\nu \in \mathbb{N}$, $n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)^3 - n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)^2 - f\left(\frac{1}{n}\right) + 1 = 0$.

9. Sea Ω simétrico con respecto a $\mathbb{R}$ tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(\Omega \cap \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Probar que para todo $z \in \Omega$ vale que $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

10. Sea Ω un abierto acotado y conexo y consideremos n puntos $P_1, P_2, \dots, P_n$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Probar que el producto $\overline{PP_1} \cdot \ldots \cdot \overline{PP_n}$ de las distancias de un punto P en $\overline{\Omega}$ a los puntos $P_1, \dots, P_n$ alcanza su máximo en un punto de la frontera de Ω.

11. Sea f entera tal que $f(0) = \frac{1}{2}$ y $|f(z)| \le \left|e^z - \frac{1}{2}\right|$ para todo z en $\mathbb{C}$. Probar que $f(z) = e^z - \frac{1}{2}$ para todo z en $\mathbb{C}$.

12. Supongamos que Ω es acotado y sea $f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}(\Omega)$. Si $|f|$ es constante en $\partial\Omega$, probar que o bien f es constante en Ω o bien se anula allí.

13. *Existencia de ceros.* Sea B un disco abierto con clausura contenida en Ω y centro c. Sea $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ y supongamos que $\min_{\partial B} |f| > |f(c)|$.

(I) Probar que f tiene una cero en B.

(II) Deducir que si $2\delta := \min_{\partial B} |f - f(c)| > 0$, entonces $B(f(c), \delta) \subseteq f(B)$.

14. Sea $f \in \mathscr{O}(\Omega)$. Probar que si f tiene un mínimo local en un punto w de Ω entonces o bien f es constante o bien $f(w) = 0$.

15. *Estimación de Cauchy en compactos.* Sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Probar que para todo entorno compacto L de K en Ω y todo $\nu \in \mathbb{N}$ existe un constante M, que solo depende de Ω, K y L, tal que

$$|f^{(\nu)}|_K \leqslant M_\nu |f|_L \text{ para toda } f \in \mathscr{O}(\Omega).$$

16. *Convergencia de derivadas.* Probar que si $(f_\nu) \subseteq \mathscr{O}(\Omega)$ converge compactamente a f en Ω, la sucesión de derivadas (f'_ν) converge compactamente a f' en Ω.

Definición. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \Omega$ y supongamos que

(a) tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final ó,

(b) ambos son caminos cerrados.

Una *homotopía de* γ_0 *a* γ_1 es una función continua $H : [0,1]^2 \longrightarrow \Omega$ que cumple que

- $H(s,0) = \gamma_0(s)$ para $s \in [0,1]$,
- $H(s,1) = \gamma_1(s)$ para $s \in [0,1]$,
- $H(0,t)$ y $H(1,t)$ son constantes para $t \in [0,1]$ en el caso (a) o que,
- $s \longmapsto H(s,t)$ es un camino cerrado para cada $t \in [0,1]$ en el caso (b).

En esta situación decimos que γ_0 y γ_1 son *homotópicos en* Ω y notamos $\gamma_0 \simeq \gamma_1$. Solemos escribir $\gamma_t(s) = H(s,t)$. Diremos que γ_0 y γ_1 son *linealmente homotópicos* si podemos elegir homotopía H entre γ_0 y γ_1 de la forma

$$H(s,t) = (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s).$$

17. *Invarianza homotópica de la integral.** Probar que si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y si γ_0 y γ_1 son caminos homotópicos en Ω, entonces

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz. \tag{1}$$

Sugerencia: Supongamos que $H : I \times I \longrightarrow \Omega$ es una homotopía entre γ_0 y γ_1.

(i) Probar que existe una subdivisión de $I \times I$ en rectángulos R_{ij} de forma que $H(R_{ij})$ está contenida en un disco abierto de Ω.

(ii) Usando el ítem anterior, probar que existen caminos $\eta_0, \dots, \eta_n$ tal que

- $\eta_0 = \gamma_0$ y $\eta_n = \gamma_1$,
- η_i es un camino poligonal si $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y
- η_i es linealmente homotópico a η_{i+1} para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

(iii) Deducir que es sufiente probar (1) en el caso que γ_0 y γ_1 son linealmente homotópicos. En este caso, probar que la función

$$g(t) = \int_{\gamma_t} f\,dz$$

es constante.

Definición: Un camino cerrado en Ω se dice *nulhomotópico en* Ω si es homotópico a un camino constante en Ω. Decimos que Ω es *simplemente conexo* si todo camino cerrado en Ω es nulhomotópico.

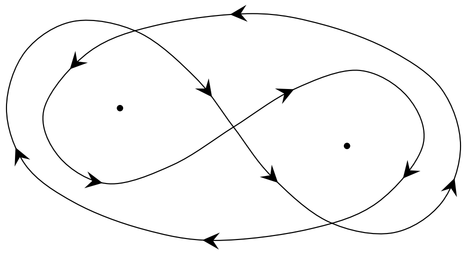
18. Supongamos que γ es un camino en Ω y que para algúna $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ la integral $\int_\gamma f\,dz$ es no nula. Entonces γ no es nullhomotópico en Ω.

19. Probar que toda función holomorfa en Ω es localmente la derivada de una función holomorfa y, que si Ω es simplemente conexo, entonces admite, de hecho, una primitiva definida en todo Ω.

20. Supongamos que Ω es simplemente conexo. Probar que toda función holomorfa en Ω admite un logaritmo, y luego que admite raíces ν-ésimas para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

Definición: Una curva γ en Ω que tal que $\int_\gamma f\,dz = 0$ para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ se dice *nulhomóloga en* Ω. Por el Ejercicio 17 toda curva nulhomotópica en Ω es nulhomóloga allí.

21. Este ejercicio ilustra la existencia de curvas nulhomólogas pero no nulhomotópicas. Sea $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, donde $a \neq b$. Probar que la curva en la siguiente figura es nulhomóloga y *convencerse* de que no es nulhomotópica en Ω_1.



22. Probar que si Ω es simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω. Probar que la hipótesis de conexión simple de Ω es necesaria.