Análisis Complejo — 1$^{\text{er}}$ Cuatrimestre de 2017

Práctica 4: *integrales de línea y teoría de Cauchy.*

Nota: Escribimos $\partial B_r(z)$ a la curva que tiene imagen el borde del disco $B(z,r)$ y la recorre una vez en el sentido positivo. Cuando $z=0$, escribimos simplemente ∂B_r. Fijamos Ω una región en $\mathbb{C}$. Un camino será siempre suave a trozos, excepto que digamos lo contrario.

1. Sea γ el borde del primer cuadrante del disco unidad. Calcular

$$\int_{\partial B_1} \overline{z}\, dz, \qquad \int_\gamma |z|^2 z\, dz$$

2. Sean γ_1, γ_2 curvas en $\mathbb{C}$ con $\gamma_1(1)=\gamma_2(0)$, y notemos por $-\gamma_1$ a la curva γ_1 recorrida en el sentido opuesto, y por $\gamma_1 * \gamma_2$ a curva que se obtiene al concatenar γ_1 con γ_2. Probar las siguientes propiedades:

(I) *Aditividad en caminos:* $\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f\, dz = \int_{\gamma_1} f\, dz + \int_{\gamma_2} f\, dz$

(II) *Cambio de orientación:* $\int_{-\gamma} f\, dz = -\int_\gamma f\, dz$

3. Sea γ la intersección de ∂B_1 con el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geqslant 0\}$. Demostrar que

$$\left| \int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^2}\, dz \right| \leq \pi \frac{1+e}{2}.$$

4. Probar que $\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$ donde Γ_r es la porción del círculo ∂B_r en el semiplano positivo.

5. Fijemos un número real positivo r.

(i) Calcular $\int_{\partial B_r}(z-v)^\nu\,dz$ si ν es un entero distinto de -1.

(ii) Probar que si $v \notin \overline{B}(0,r)$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r}\frac{dz}{z-v} = 0.$$

(iii) Probar que si $v \in B(0,r)$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r}\frac{dz}{z-v} = 1.$$

Sugerencia: reducir al caso que $v = 0$ usando la Figura 1.

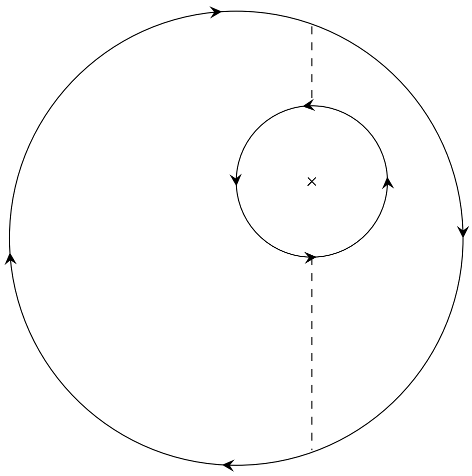


Figura 1: *That is no moon. It's a space station* — Obi Wan Kenobi.

6. Sea (f_ν) una sucesión en $\mathscr{C}(\Omega)$. Demostrar que si (f_ν) tiende a f de forma localmente uniforme en Ω, entonces

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\gamma f_\nu\,dz = \int_\gamma f\,dz$$

para todo camino γ en Ω.

7. Sea $(f_\nu) \in \mathscr{O}(\Omega)$. Probar que si (f_ν) converge de forma localmente uniforme a f en Ω entonces $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ y que, además, las derivadas (f_ν') convergen de forma localmente uniforme a f' en Ω.

Sugerencia: usar el teorema de Goursat para probar que f es localmente integrable y la fórmula integral de Cauchy para probar la afirmación sobre las derivadas.

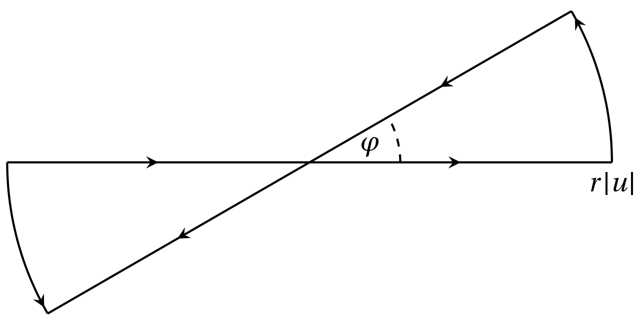
8. Encontrar todos los posibles valores de $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$, donde γ es una curva diferenciable simple cerrada que no pasa por i ni $-i$.

9. Parametrizar la elipse con ecuación $x^2a^{-2} + y^2b^{-2} = 1$ por una curva apropiada γ y evaluar $\int_\gamma \frac{dz}{z}$. Deducir que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

10. Probar que si $u = |u|e^{\varphi i}$ es un número complejo no nulo y si $|\Im u| \leqslant \Re u$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{u},$$

integrando a la función holomorfa $f(z) = e^{-z^2}$ sobre la siguiente curva,



y haciendo que $r \to \infty$. *Sugerencia:* Probar que las integrales sobre los arcos tienden a cero.

11. *El índice de una curva.* Sea γ una curva cerrada y w un punto $\mathbb{C}$ fuera de ella. Llamamos a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - w}$$

el *índice de la curva γ con respecto a w* y lo notamos $\operatorname{Ind}(\gamma, w)$. Definimos el *interior de la curva γ* por $\operatorname{Int}(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma : \operatorname{Ind}(\gamma, z) \neq 0\}$ y el *exterior de la curva γ* por $\operatorname{Ext}(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma : \operatorname{Ind}(\gamma, z) = 0\}$. Probar la siguientes afirmaciones.

(i) $-\operatorname{Ind}(\gamma, w) = \operatorname{Ind}(-\gamma, w)$ donde $-\gamma$ se define como en el Ejercicio 2.

(II) Si γ está contenida en $B(c,r)$, todo punto de $B(c,r)^c$ es exterior a γ.

(III) La función $z \in \mathbb{C} \longmapsto \operatorname{Ind}(\gamma, w)$ es continua y es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

(IV) La componente conexa que contiene a $\operatorname{Int}(\gamma)$ es acotada.

12. Sean γ_1 y γ_2 curvas en $\mathbb{C}$ que no pasan por el origen, y sea $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ la curva que se obtiene multiplicando puntualmente estas dos curvas. Probar que

$$\operatorname{Ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2, 0) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, 0) + \operatorname{Ind}(\gamma_2, 0).$$

Sugerencia: usar logaritmos como primitivas locales.

13. Calcular las siguiente integrales de línea.

(I) $\displaystyle\int_{\partial B_4} \frac{e^z}{z-2}\,dz,$

(II) $\displaystyle\int_{\partial B_1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}\,dz,$

(III) $\displaystyle\int_{\partial B_{2/3}} \frac{\log(1+z)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3}\,dz,$

(IV) $\displaystyle\int_{\partial B_1(1)} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}\,dz.$

14. Probar que la función $f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt^2}\,dt$ es holomorfa en el semiplano positivo $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$.

15. Probar que si f es holomorfa en $B(0,R)$ y continua en $\overline{B}(0,R)$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

para todo $z \in B(0,R)$.

16. Sea $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, y tomemos dos puntos distintos $z, w \in \mathbb{C}$. Sea $B = B(c,r)$, y $d_1 = |z-c|, d_2 = |w-c|$. Usando la fórmula integral de Cauchy, probar que

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-w)}\,d\xi$$

y luego, con la estimación estándar, obtener la desigualdad

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| \leqslant \frac{r}{(r-d_1)(r-d_2)} |f|_{\partial B}.$$

Deducir de esto el *teorema de Liouville*: una funcion entera y acotada es constante.

Nota: Observar que la misma conclusión se deduce si la función $r \in \mathbb{R} \longmapsto |f|_{\partial B_r} \in \mathbb{R}$ crece "más lento" que r. En este sentido, las funciones enteras no constantes divergen por lo menos como $|z|$.

17. Sea γ una curva en $\mathbb{C}$ y sea $g : \gamma \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Supongamos, además, que para cada $\xi \in \gamma$, la función $z \longmapsto g(\xi, z)$ es holomorfa en Ω. Entoneces la función

$$G(z) = \int_\gamma g(\xi, z)\, d\xi$$

es holomorfa en Ω. ¿Cuál es su derivada?

18. *Máximos en discos**. Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, y sea B un disco abierto de radio r contenido en Ω.

(I) Usando la estimación estandar y la fórmula integral de Cauchy en B, probar que $|f(w)| \leqslant |f|_{\partial B}$ si w es el centro de B.

(II) Probar que $|f(w)| \leqslant \alpha(w)|f|_{\partial B}$ dónde definimos $\alpha(w) = r|(w-z)^{-1}|_{\partial B}$ y $w \in B$ es arbitrario.

Nota: Aquí $|(w-z)^{-1}|_{\partial B}$ denota el máximo de la función $h(z) = (w-z)^{-1}$ en ∂B.

(III) Haciendo lo anterior para f^ν para cada natural ν, deducir que

$$|f(w)| \leqslant \alpha(w)^{1/\nu}|f|_{\partial B}$$

y concluir que la cota del primer ítem vale para cualquier punto interior a B. Así, *el máximo de f en $\overline{B}$ se alcanza sobre su borde.*