Análisis Complejo — 1$^{\text{er}}$ Cuatrimestre de 2017

Práctica 2: *funciones holomorfas, logaritmos y raíces n-ésimas.*

Fijamos de ahora en adelante una región Ω , esto es, un subconjunto abierto, conexo y no vacío de $\mathbb{C}$.

1. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Entonces

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{z\to z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \Re w \qquad \text{y} \qquad \lim_{z\to z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \Im w.$$

2. Sean $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones, y definamos funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $g : \Omega \to \mathbb{R}^2$ por $f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ y $g(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$ para cada complejo $z = x + iy$. Asumiendo que f es derivable en $z_0 = a + ib$:

(i) Probar que g es diferenciable en (a, b).

(ii) Calcular para $h \in \mathbb{R}$ los límites

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$$

en términos de u y v. ¿Qué se deduce?

(iii) ¿Qué relación hay entre $|f'(z_0)|$ y el determinante jacobiano de g en (a, b)?

3. Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por:

$$f(x+iy)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si } x+iy\neq 0\\ 0 & \text{si } x+iy=0.\end{cases}$$

Verificar que f es continua en 0 y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero *no* es derivable.

4. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones de $z=x+iy$ y hallar su derivada en cada caso:

(i) $f(z)=y+ix$,

(ii) $f(z)=\overline{z}$

(iii) $f(z)=x^2-y^2-2xy+i(x^2-y^2+2xy)$,

(iv) $f(z)=x^2+iy^2$,

(v) $f(z)=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)$,

(vi) $f(z)=e^{-y}(\cos x+i\operatorname{sen} x)$,

(vii) $f(z)=z^3-2z$,

(viii) $f(z)=z^2\cdot\overline{z}$,

(ix) $f(z)=\dfrac{z+1}{1-z}$,

(x) $f(z)=\begin{cases}\frac{x+iy}{x^2+y^2} & \text{si } z\neq 0\\ 0 & \text{si } z=0.\end{cases}$

5. Una función $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de tipo $\mathscr{C}^2$ es *armónica* si se verifica que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

A su vez, $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una *conjugada armónica* de u si la función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ es holomorfa.

(i) Probar que si la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son $\mathscr{C}^2$, entonces son armónicas. Deducir que si u es una función $\mathscr{C}^2$ que admite una conjugada armónica, entonces u es armónica.

(ii) Probar que si v y $\tilde{v}$ son conjugadas armónicas de u, entonces v y $\tilde{v}$ difieren en una constante.

(iii) Hallar conjugadas armónicas, cuando sea posible, de las siguientes funciones:

(i) $u_1(x,y) = x^2 - y^2$,

(ii) $u_2(x,y) = x^2y^2$,

(iii) $u_3(x,y) = 2x(1-y)$.

(iv) Probar que si v es conjugada armónica de u, las curvas de nivel de u y v se cortan de manera ortogonal.

6. *Conexión suave de regiones.*

(i) Probar que todo par de puntos de Ω pueden unirse por una curva $\mathscr{C}^1$ a trozos.

(ii) Si f es holomorfa en Ω y f' se anula en Ω, probar que f es constante.

7. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar que si alguna de las siguientes funciones son constantes, entonces f es también constante:

$$\Re(f), \qquad \Im(f), \qquad |f|, \qquad \arg(f),$$

Deducir que si $\overline{f}$ también es holomorfa, f resulta constante.

8. Sea f holomorfa en una región Ω y supongamos que su imagen está contenida en la unión de finitas rectas en $\mathbb{C}$. Probar que f es constante.

9. Si Ω es simétrica respecto del eje real y si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, entonces la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa.

10. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que $f'(0) = 1$ y para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$f(x+iy) = e^x f(iy).$$

Sugerencia: definiendo $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(iy) = c(y) + is(y)$, probar que $c' = -s$ y que $s' = c$.

11. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$f(x+iy) = f(x) + f(iy) + 2xyi.$$

12. *Regla de L'Hopital.*

Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

13. Calcular los siguientes límites:

(I) $\displaystyle\lim_{z \to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$,

(II) $\displaystyle\lim_{z \to 2i} \frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$,

(III) $\displaystyle\lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z-e^{\frac{\pi i}{3}})z}{z^3+1}$,

(IV) $\displaystyle\lim_{z \to i} \frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}$.

14. Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una curva $\mathscr{C}^1$ y sea $\gamma'(t_0)$ el número complejo que se obtiene transladando al origen el vector tangente a esta curva en t_0. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Mostrar que $f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)$ es el número complejo que se obtiene transladando al origen el vector tangente a la curva $f \circ \gamma$ en t_0.

15. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por

$$\gamma_1(t) = t, \qquad \gamma_2(t) = (1+i)t, \qquad f(z) = \operatorname{sen}(z) + z^4.$$

Calcular en qué ángulo se cortan las curvas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ en $t = 0$.

Función logaritmo y raíces n-ésimas

16. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama del logaritmo de* z en Ω a toda función *continua* $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

(I) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω.

(II) Sean g_1, g_2 dos ramas de logaritmo en Ω. Demostrar que si Ω es conexo y existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1(z) = g_2(z)$ para todo $z \in \Omega$.

(III) Demostrar que si existe una rama del logaritmo en Ω, entonces $S^1 \not\subseteq \Omega$.

17. Sean $g:\Omega\to\mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $b\in\mathbb{C}$, $a\in\Omega$. Definimos $a^b=e^{b\cdot g(a)}$.

(i) Verificar que si $b\in\mathbb{Z}$, a^b no depende de la elección de g y coincide con $\underbrace{a\cdots a}_{b\text{ veces}}$.

(ii) Calcular todos los valores que pueden tomar i^i, $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.

(iii) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones $h_1:\Omega\to\mathbb{C}$, $h_1(z)=z^b$ y $h_2:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $h_2(z)=a^z$ son funciones holomorfas.

(iv) Sean $z\in\Omega$, $a,b\in\mathbb{C}$ tales que $z^a\in\Omega$. ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y z^az^b? ¿Qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si se sabe que $b\in\mathbb{Z}$?

18. Sea log la rama principal del logaritmo definida en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0}$. Probar que para todo $t\in\mathbb{R}$,

$$\arctan(t)=\frac{1}{2i}\log\Big(\frac{i-t}{i+t}\Big).$$

19. Fijemos $n\in\mathbb{N}$ y un abierto $\Omega\subset\mathbb{C}^*$. LLamamos una *rama de la raíz n-ésima de z* en Ω a toda función continua $g:\Omega\to\mathbb{C}$ tal que $g(z)^n=z$ para todo $z\in\Omega$. En tal caso, notaremos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$. Probar que:

(i) si $\Omega=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\ge 0}$, hay exactamente dos ramas de $\sqrt{z}$ en Ω y definirlas,

(ii) toda rama de $\sqrt{z}$ es holomorfa, y

(iii) si Ω es conexo y f es una rama de $\sqrt{z}$ en Ω, entonces f y $-f$ son todas.

20. Sea $\Omega=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0}$, g una rama del logaritmo definida en Ω y sea $\sqrt[3]{z}$ la rama de la función raíz cúbica definida en Ω por $\sqrt[3]{z}=e^{g(z)/3}$.

(i) Demostrar que para toda rama g, $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo z en Ω.

(ii) Hallar todas las ramas g para las cuales $g(\sqrt[3]{z})=\frac{1}{3}g(z)$ para todo z en Ω.

(iii) Probar que si se cambia Ω por $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\ge 0}$, aumenta la cantidad de ramas que satisfacen el item anterior.