

Análisis Complejo — 1^{er} Cuatrimestre de 2017

Práctica 2: funciones holomorfas, logaritmos y raíces n -ésimas.

1. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Probar que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a + ib$ si y solamente si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = a \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = b.$$

2. Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones, y definamos funciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y), \quad g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Asumiendo que f es derivable en $z_0 = a + ib$:

(i) Probar que g es diferenciable en (a, b) .

(ii) Calcular

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$$

en términos de u y v . ¿Qué se deduce?

(iii) ¿Qué relación hay entre $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(a, b)$?

3. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + iy = 0. \end{cases}$$

Verificar que f es continua en 0 y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero *no* es derivable.

4. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones de $z = x + iy$ y hallar su derivada en cada caso:

- (i) $f(z) = y + ix,$ (vii) $f(z) = z^3 - 2z,$
(ii) $f(z) = \bar{z}$ (viii) $f(z) = z^2 \cdot \bar{z},$
(iii) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy),$
(iv) $f(z) = x^2 + iy^2,$ (ix) $f(z) = \frac{z+1}{1-z},$
(v) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$
(vi) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x),$ (x) $f(z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$

5. Una función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de tipo \mathcal{C}^2 es *armónica* si se verifica que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

A su vez, $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una *conjugada armónica* de u si la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa.

- (i) Probar que si la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son \mathcal{C}^2 , entonces son armónicas. Deducir que si u es una función \mathcal{C}^2 que admite una conjugada armónica, entonces u es armónica.
- (ii) Probar que si v y \tilde{v} son conjugadas armónicas de u , entonces v y \tilde{v} difieren en una constante.
- (iii) Hallar conjugadas armónicas, cuando sea posible, de las siguientes funciones:
- a) $u_1(x, y) = x^2 - y^2,$ b) $u_2(x, y) = x^2 y^2,$ c) $u_3(x, y) = 2x(1 - y).$
- (iv) Probar que si v es conjugada armónica de u , las curvas de nivel de u y v se cortan de manera ortogonal.

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, esto es, un subconjunto abierto, conexo y no vacío de \mathbb{C} .

- (i) Probar que todo par de puntos de Ω pueden unirse por una curva \mathcal{C}^1 a trozos.
- (ii) Si f es holomorfa en Ω y f' se anula en Ω , probar que f es constante.

7. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar que si alguna de las siguientes funciones son constantes, entonces f es también constante:

$$\Re(f), \quad \Im(f), \quad |f|, \quad \arg(f),$$

Deducir que si \bar{f} también es holomorfa, f resulta constante.

8. Sean $L_1, \dots, L_n \subseteq \mathbb{C}$ rectas distintas. Probar que si $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $g(\mathbb{C}) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ entonces g es constante.

9. Sea Ω un abierto simétrico respecto del eje real y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Probar que la función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es holomorfa.

10. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f'(0) = 1$ y para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$f(x + iy) = e^x f(iy).$$

Sugerencia: definiendo $c, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(iy) = c(y) + is(y)$, probar que $c' = -s$ y que $s' = c$.

11. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$f(x + iy) = f(x) + f(iy) + 2xyi.$$

12. *Regla de L'Hopital.*

Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

13. Calcular los siguientes límites:

$$(i) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1},$$

$$(iii) \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z - e^{\frac{\pi i}{3}})z}{z^3 + 1},$$

$$(ii) \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{2z^2 + (3 - 4i)z - 6i},$$

$$(iv) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}.$$

14. Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una curva \mathcal{C}^1 y sea $\gamma'(t_0)$ el número complejo que se obtiene trasladando al origen el vector tangente a esta curva en t_0 . Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Mostrar que $f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)$ es el número complejo que se obtiene trasladando al origen el vector

tangente a la curva $f \circ \gamma$ en t_0 .

15. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$\gamma_1(t) = t, \quad \gamma_2(t) = (1 + i)t, \quad f(z) = \operatorname{sen}(z) + z^4.$$

Calcular en qué ángulo se cortan las curvas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ en $t = 0$.

Función logaritmo y raíces n-ésimas

16. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama del logaritmo de z en Ω* a toda función continua $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

- (i) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω .
- (ii) Sean g_1, g_2 dos ramas de logaritmo en Ω . Demostrar que si Ω es conexo y existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1(z) = g_2(z) \forall z \in \Omega$.
- (iii) Demostrar que si existe una rama del logaritmo en Ω , entonces $S^1 \not\subseteq \Omega$.

17. Sean $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $b \in \mathbb{C}$, $a \in \Omega$. Definimos $a^b = e^{b \cdot g(a)}$.

- (i) Verificar que si $b \in \mathbb{Z}$, a^b no depende de la elección de g y coincide con $\underbrace{a \cdots a}_b$.
- (ii) Calcular todos los valores que pueden tomar i^i , $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.
- (iii) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones $h_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $h_1(z) = z^b$ y $h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h_2(z) = a^z$ son funciones holomorfas.
- (iv) Sean $z \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $z^a \in \Omega$. ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? ¿Qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si se sabe que $b \in \mathbb{Z}$?

18. Sea \log la rama principal del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(t) = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i-t}{i+t} \right).$$

19. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^*$. Llamamos una *rama de la raíz n -ésima de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. En tal caso, notaremos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$. Probar que:

- (i) si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de \sqrt{z} en Ω y definir las,
- (ii) toda rama de \sqrt{z} es holomorfa, y
- (iii) si Ω es conexo y f es una rama de \sqrt{z} en Ω , entonces f y $-f$ son todas.

20. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, g una rama del logaritmo definida en Ω y sea $\sqrt[3]{z}$ la rama de la función raíz cúbica definida en Ω por $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$.

- (i) Demostrar que para toda rama g , $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo z en Ω .
- (ii) Hallar todas las ramas g para las cuales $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3}g(z)$ para todo z en Ω .
- (iii) Probar que si se cambia Ω por $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, aumenta la cantidad de ramas que satisfacen el ítem anterior.