Análisis Complejo — 1er Cuatrimestre de 2017

Práctica 1: *la esfera de Riemann y transformaciones de Möbius.*

---

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $(1+2i)^3$

(ii) $\dfrac{1}{2-3i}$

(iii) $\left(\dfrac{5-3i}{1+i}\right)^2$

(iv) $(1+i)^{50}$

(v) $(i+5)(i-1)(i-6)$

(vi) $(1+i)^\nu + (1-i)^\nu$ con $\nu \in \mathbb{N}$

(vii) $\left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)^3$

(viii) $\dfrac{4-i}{i}$

2. Dado un número complejo $z = x + iy$, definimos la *parte real de* z por $\Re z = x$, y la *parte imaginaria de* z por $\Im z = y$. Determinar las partes reales e imaginarias de los siguientes números, en términos de las de z.

(i) z^2

(ii) z^{-1}

(iii) $\dfrac{z-i}{z+i}$

(iv) $\dfrac{1+z}{1-z}$

(v) z^{-2}

(vi) z^4

(vii) $\dfrac{i-z}{1+iz}$

(viii) $\dfrac{z}{z+1}$

3. Dado un número complejo $z = x + iy$, definimos su *conjugado* por $\bar{z} = x - iy$. Fijados números complejos z y w, verificar las siguientes afirmaciones.

(i) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

(ii) $z = -\bar{z} \iff z \in i\mathbb{R}$.

(iii) $\overline{z}\,\overline{w} = \overline{zw}$

(iv) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(v) $\Re z = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$

(vi) $\Im z = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(vii) $\bar{\bar{z}} = z$

(viii) $\Re(iz) = -\Im z$

(ix) $\Im(iz) = \Re z$

4. La *norma* de un número complejo z es el número real y no negativo $(z\bar{z})^{1/2}$, y lo notamos $|z|$. Dado un segundo número complejo w, definimos $\langle z, w\rangle = \Re(z\overline{w})$. En particular, $\langle z, z\rangle = |z|^2$. Verificar las siguientes igualdades.

(i) $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

(ii) $\text{máx}(|\Re z|, |\Im z|) \leqslant |z|$

(iii) $\langle z, w\rangle = \langle \overline{z}, \overline{w}\rangle$

(iv) $\langle z, w\rangle^2 + \langle iz, w\rangle^2 = |z|^2|w|^2$

(v) $|\langle z, w\rangle| \leqslant |z||w|$

(vi) $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\langle z, w\rangle + |w|^2$

5. Deducir del último inciso del ejercicio anterior la desigualdad triangular

$$|z + w| \leqslant |z| + |w|$$

válida para cualquier par de números complejos z y w, y completar las verificaciones para probar que la asignación

$$z \in \mathbb{C} \longrightarrow |z| \in \mathbb{R}$$

es una norma sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}$. Deducir que la asignación

$$(z, w) \in \mathbb{C} \longmapsto |z - w| \in \mathbb{R}$$

define una métrica en $\mathbb{C}$, a la que llamamos la *métrica usual*.

6. *Ángulos entre números complejos.* Teniendo en cuenta que $\langle z, w\rangle$ es, en efecto, un producto interno en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial, probar que, fijados $z \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto definido por la ecuación

$$\langle z_0, z\rangle \geqslant \alpha$$

es un semi-plano cerrado. ¿Qué recta lo define? ¿Qué interpretacón geométrica puede dar en el caso que $\alpha = 0$? Grafique.

7. *Círculos en el plano complejo.* Fijemos $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar que el conjunto definido por la ecuación

$$|z - z_0| = \alpha$$

es un círculo de centro z_0 y radio α.

8. *Transformaciones lineales.*

(i) Probar que toda transformación $\mathbb{R}$-lineal $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ puede escribirse de forma única como

$$T(z) = \mu z + \lambda \overline{z}$$

donde $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$, y determinar éstos números en términos de T. Probar que T es $\mathbb{C}$-lineal si y solamente si $\lambda = 0$, y en tal caso T es multiplicación por $T(1)$.

(ii) Fijemos una matriz A con coeficientes reales, y consideremos la transformación $\mathbb{R}$-lineal $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que define A. Probar que son equivalentes:

- T es $\mathbb{C}$-lineal y
- $A_{11} = A_{22}$ y $A_{12} = A_{-21}$,

y que en tal caso T es la multiplicación por $z_A = A_{11} + iA_{21}$.

9. *Representación matricial de los números complejos.* Probar que la asignación del ejercicio anterior define una biyección

$$A \in \mathscr{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \longmapsto z_A \in \mathbb{C}$$

de modo que $z_{A+B} = z_A + z_B$, $z_{AB} = z_A z_B$ y $z_{\mathrm{id}} = 1$. Resulta el conjunto $\mathscr{M}$ de matrices un cuerpo con la multiplicación y suma usual, isomorfo a $\mathbb{C}$.

Función exponencial y funciones trigonométricas. Forma polar.

10. Dado un número complejo $z = a + ib$, definimos

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b).$$

(i) Probar que para todo $w \in \mathbb{C}$ vale que $e^{z+w} = e^z e^w$.

(ii) Describir los numeros complejos w para los que se verifica que $e^w = 1$.

(iii) Demostrar que si $e^z = e^w$, entonces z y w difieren en un múltiplo entero de $2\pi i$.

(iv) Probar que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

11. *Preservación de ángulos.*

(i) Mostrar que si $z = re^{i\theta}$ es la *forma polar* de z, entonces la transformacion $\mathbb{C}$-lineal T_z dada por multiplicar por z se factoriza como una rotación en el plano de ángulo θ seguida de una homotecia de factor r. Deducir que T_z preserva el ángulo entre dos vectores cualesquiera.

(ii) Usando el Ejercicio 8, caracterizar todas las transformaciones $\mathbb{R}$-lineales $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que preservan el ángulos entre dos vectores cualesquiera.

12. Fijado ν natural y w_0 un número complejo no nulo, probar que existen ν soluciones distintas a $z^\nu = w_0$.

13. Mostrar que, para $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Generalizando el ítem anterior, definimos para $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

(i) Comprobar que para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \qquad e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

(ii) Mostar que sin y cos tienen ambas período 2π.

(iii) Mostar que los únicos valores para los cuales sin y cos se anulan son los valores reales usuales.

(iv) Probar que para $z \in \mathbb{C}$,

$$\overline{\cos z} = \cos \overline{z}, \qquad \overline{\sin z} = \sin \overline{z}.$$

(v) Probar que sin y cos son funciones sobreyectivas.

(vi) Probar que las raíces de sin y cos son las usuales, es decir, no aparecen nuevas raíces complejas.

(vii) Determinar los $z \in \mathbb{C}$ tal que $\sin z$ es real, y hacer lo mismo con cos.

La esfera de Riemann

14. Escribimos $\widehat{\mathbb{C}}$ al conjunto de número complejos junto con un símbolo extra que notamos ∞, y pensamos como el "punto en el infinito". Notamos S^2 a la esfera de radio 1 centrada en el origen en $\mathbb{R}^3$, y $N = (0,0,1)$ al "polo norte" de S^2. La *proyeccion estereográfica* $\pi : S^2 \longrightarrow \widehat{C}$ envía n a ∞ y a $P \in S^2 \smallsetminus \{N\}$ a $\pi(P) = x + iy$ si $(x, y, 0)$ es la intersección del plano con ecuación $x_3 = 0$ y la recta $\overline{PN}$.

(i) Probar que $\pi(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ si $x_3 \neq 1$.

(ii) Probar que π es biyectiva, y su inversa está dada por

$$\varphi(z) = \frac{1}{1+|z|^2}\left(2\Re z, 2\Im z, |z|^2 - 1\right).$$

(iii) Calcular la imagen de las rectas con ecuación $\Re z = 0$ e $\Im z = 0$ bajo φ.

15. La función φ le da a $\widehat{\mathbb{C}}$ una métrica inducida por la métrica usual de $\mathbb{R}^3$: si $z, w \in \mathbb{C}$, definimos

$$\widehat{d}(z, w) = \|\varphi(z) - \varphi(w)\|.$$

(i) Verificar que $\widehat{d}$ es, en efecto, una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$, y que su restricción a $\mathbb{C}$ es equivalente a la métrica usual, probando, por ejemplo, que éstas métricas tienen las mismas sucesiones convergentes.

Comentario: Esto equivale a la afirmación que φ y su inversa son continuas, por lo que no es válido usar esto en la demostración.

(ii) Dados $z, w \in \mathbb{C}$, verificar que

$$\widehat{d}(z, w) = \frac{2|z - w|}{(1+|z|^2)^{1/2}(1+|w|^2)^{1/2}} \qquad \text{y que} \qquad \widehat{d}(z, \infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}}.$$

(iii) Probar que $(\widehat{\mathbb{C}}, \widehat{d})$ es un espacio métrico compacto y, por lo tanto, completo.

16. Sea C una circunferencia contenida en S^2 y sea Π el único plano en $\mathbb{R}^3$ tal que $\Pi \cap S^2 = C$. Mostrar que si C pasa por N entonces su proyección en $\mathbb{C}$ es una recta, y en caso contrario es otra circunferencia.

Transformaciones de Möbius

Definición. Una homografía, o transformación de Möbius, es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

donde a, b, c, d son complejos y $ad - bc \neq 0$.

17. Probar que el conjunto de homografías es un grupo bajo la composición usual de funciones.

18. Probar que dados tres puntos distintos z_1, z_2, z_3 de $\widehat{\mathbb{C}}$ existe una única homografía que asigna

$$z_1 \longmapsto 0, \qquad z_2 \longmapsto 1, \qquad z_3 \longmapsto \infty.$$

Deducir que lo mismo es cierto si reemplazamos $0, 1$ e ∞ por otros tres puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$.

19. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \neq 1$. Probar que la homografia

$$T(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

fija a la circunferencia unidad y lleva α a 0.

20. Consideremos la asignación

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

de matrices complejas no singulares a homografías. Decimos que A representa a la homografía T_A. Fijemos dos matrices no singulares A y B.

(i) ¿Qué homografía representa el producto AB?

(ii) ¿Qué homografía representa la inversa A^{-1}?

(iii) ¿Qué homograías representan las matrices diagonales?

(iv) ¿Cuándo dos matrices representan la misma homografía?

21. Probar que una homografía fija la recta real extendida $\widehat{\mathbb{R}}$ si, y solamente si, puede representarse por una matriz con coeficientes *reales*.

22. Probar que una homografía tiene siempre al menos un punto fijo, y si tiene tres, es la identidad.