Análisis Complejo - Primer Cuatrimestre de 2017

Práctica N°1: Números Complejos

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$:

   (a) $(i + 1)(i - 1)(i + 3)$,
   (b) $(3 - 2i)^2$,
   (c) $\frac{1}{-1+3i}$,
   (d) $\frac{1+i}{i}$,
   (e) $2 + i2 - i$,
   (f) $(1 + i)^{100}$,
   (g) $(1 + i)^{65} + (1 - i)^{65}$.

2. Sean z y w dos números complejos. Demostrar que:

   (a) $\overline{z} = z$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$,
   (b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
   (c) $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$,
   (d) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$,
   (e) $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

3. Probar que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $\overline{a}_nX^n + \overline{a}_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0 = 0$. Deducir que si $P(X)$ es un polinomio con coeficientes reales y $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(X)$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ también lo es.

4. Hallar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $iz^2 + (3 - i)z - (1 + 2i) = 0$.

5. Para $z \in \mathbb{C}$, se define $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Probar que:

   (a) Si $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
   (b) $|zw| = |z|\,|w|$ y si $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$,
   (c) $-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|$ y $-|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|$,
   (d) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w})$ y $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w})$,
   (e) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$,
   (f) $|z + w| \leq |z| + |w|$ y $|z - w| \geq |z| - |w|$.

   Interpretar geométricamente la propiedad (e), también conocida como “Ley del paralelogramo”.

6. Probar que $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z, w) = |z - w|$ es una métrica.

7. Sea $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ y $c > 0$. Para $z = x + iy$, transformar la condición $|z - \alpha| = c$ en una ecuación que involucre solo a x, y, a, b y c; describir qué figura geométrica representa esta ecuación.

8. Describir geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

(a) $|z - i + 3| = 5$,

(b) $|z - i + 3| \leq 5$,

(c) $\operatorname{Re}(2z + 3) \geq 0$,

(d) $\operatorname{Re}((1 + 2i)z) \geq 0$.

9. **Representación Matricial de los Números Complejos**

   (a) Dado un número complejo $\alpha = a + bi$ consideramos la función $T_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $T_\alpha(z) = \alpha \cdot z$. Pensando a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2, encontrar la matriz M_α de la transformación lineal T_α en la base $\{1, i\}$.

   (b) Mostrar que la aplicación $\Phi(\alpha) : \mathbb{C} \to \mathcal{M}$ dada por $\Phi(\alpha) = M_\alpha$ es un *isomorfismo de cuerpos* entre $\mathbb{C}$ y el siguiente conjunto de matrices

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Exponencial y Funciones Trigonométricas con argumentos complejos. Forma polar

10. **Definición**: Para $z \in \mathbb{C}, z = a + bi$, se define $e^z = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$.

    (a) Demostrar que para todo $z, w \in \mathbb{C}$, $e^{w+z} = e^w e^z$.

    (b) Describir los z tales que $e^z = 1$.

    (c) Demostrar que si $e^z = e^w$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$.

    (d) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.

11. (a) Mostrar que si $\alpha = re^{i\theta}$ ($r \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{R}$) es la *forma polar* del complejo α, entonces la transformación lineal T_α del ejercicio anterior se factoriza como una rotación en el plano complejo en el ángulo θ, seguida de una dilatación en el factor r. Deducir que T_α preserva los ángulos entre los vectores.

    (b) Hallar todas las transformaciones $\mathbb{R}$-lineales $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que preservan los ángulos entre los vectores. ¿Son todas de la forma T_α para algún $\alpha \in \mathbb{C}$?

12. (a) Pasar de la forma $a + ib$ a la forma polar:

    i. $1 + i$,　　ii. $-5i$,　　iii. -3.

    (b) Pasar de la forma polar a la forma $a + ib$:

    i. $3e^{i\frac{\pi}{4}}$,　　ii. $e^{-i\pi}$,　　iii. $\pi e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

13. (a) Para $n = 2, 3, 4, 5$, dibujar todos los números complejos z tales que $z^n = 1$.

    (b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que hay n números complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

14. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.

    (a) Hallar la imagen por f del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$.

    (b) Hallar la imagen por f del primer cuadrante.

(c) Mostrar que la imagen de la recta $\{t+it \mid t\in\mathbb{R}\}$ es una espiral.

15. (a) Sea $\theta\in\mathbb{R}$. Mostrar que $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

    (b) Generalizando las igualdades del ítem anterior, se define para $z\in\mathbb{C}$,

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

    Comprobar que para todo $z\in\mathbb{C}$,

$$\cos^2(z)+\operatorname{sen}^2(z)=1 \quad \text{y} \quad e^{iz}=\cos z+i\operatorname{sen} z.$$

    (c) Mostrar que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen período 2π.

    (d) Mostrar que los únicos valores de z para los cuales $\cos z=0$ y $\operatorname{sen} z=0$ son los valores reales usuales.

    (e) Probar que para todo $z\in\mathbb{C}$, $\cos(\overline{z})=\overline{\cos(z)}$ y $\operatorname{sen}(\overline{z})=\overline{\operatorname{sen}(z)}$

16. Hallar todos los $z\in\mathbb{C}$ tales que $\cos z\in\mathbb{R}$ y los $z\in\mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z\in\mathbb{R}$.

17. (a) Probar que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones suryectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

    (b) Hallar todas las soluciones de la ecuación $\cos z=\frac{5}{4}$.

18. Sean $a,b,b'\in\mathbb{R}$. Probar que si $|b|<|b'|$, entonces $|\cos(a+bi)|<|\cos(a+b'i)|$ y $|\operatorname{sen}(a+bi)|<|\operatorname{sen}(a+b'i)|$.

19. Sea $z\neq 1$. Probar que $1+z+\cdots+z^n=\frac{z^{n+1}-1}{z-1}$. Para $0<\theta<2\pi$, dar una fórmula para la suma $1+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta$.

Sucesiones de Números Complejos

20. (a) Probar que si $\lim_{n\to\infty} z_n=z$ entonces $\lim_{n\to\infty}|z_n|=|z|$.

    (b) Dar un ejemplo donde no valga la recíproca.

21. (a) Sea $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|<1$. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n$? Repetir para $|\alpha|>1$.

    (b) Si $|\alpha|<1$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha+\cdots+\alpha^n\right)=\dfrac{1}{1-\alpha}$.

22. Calcular, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones:

    (a) $\frac{1}{n}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$,

    (b) $n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$,

    (c) $\cos(n\pi)+i\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right)}{n^2}$,

    (d) $\left(\frac{(-1)^n+1}{3}\right)^n$,

    (e) ni^{2n+1}.

23. Se define el *conjunto de Mandelbrot* como el conjunto $\mathcal{M}$ de los números complejos c tales que la sucesión definida de manera recursiva del siguiente modo:

$$z_0=c,\quad z_{n+1}=z_n^2+c,$$

    resulta acotada. Demostrar que $\mathcal{M}\subset\{|z|\leq 2\}$.

Plano Complejo ampliado - Esfera de Riemann

24. Sean $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y $S = S^2$ (la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio 1 y centro en $(0,0,0)$). Sea $N = (0,0,1) \in S$, definimos la proyección estereográfica $\theta : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ haciendo $\theta(N) = \infty$ y dado $P \in S \setminus \{N\}$, $\theta(P) = a + ib$ sii $(a,b,0)$ es el punto de intersección de la recta $\overline{NP} \subset \mathbb{R}^3$ con el plano $x_3 = 0$.

    (a) Probar que $\theta(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ si $(x_1, x_2, x_3) \neq N$.

    (b) Probar que θ es una biyección y su inversa φ está dada por
    $$\varphi(z) = \Big(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\Big).$$

    (c) Calcular $\varphi\big(\operatorname{Re}(z) = 0\big)$ y $\varphi\big(\operatorname{Im}(z) = 0\big)$.

25. Sea $\overline{d}$ la distancia en $\widehat{\mathbb{C}}$ inducida por la distancia de $\mathbb{R}^3$ vía θ, es decir, si z, $z' \in \widehat{\mathbb{C}}$, definimos $\overline{d}(z,z') = d\big(\varphi(z), \varphi(z')\big)$ donde d es la distancia euclídea.

    (a) Verificar que $\overline{d}$ es una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que, restringida a $\mathbb{C}$, $\overline{d}$ resulta equivalente a la métrica usual (probando, por ejemplo, que $(\mathbb{C}, \overline{d})$ y $(\mathbb{C}, d_{usual})$ tienen las mismas sucesiones convergentes).

    (b) Para $z, w \in \mathbb{C}$, verificar que $\overline{d}(z,w) = \frac{2|w-z|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|w|^2)^{\frac{1}{2}}}$ y $\overline{d}(z,\infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}$.

    (c) Probar que $(\widehat{\mathbb{C}}, \overline{d})$ es un espacio métrico compacto (y por lo tanto completo).

26. Sea C una circunferencia contenida en S y sea π el único plano en $\mathbb{R}^3$ tal que $\pi \cap S = C$. Mostrar que si C pasa por N entonces su proyección en $\mathbb{C}$ es una recta y, en caso contrario, una circunferencia.

Homografías

Definición: Una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde $ad - bc \neq 0$.

27. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición..

28. Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que existe una única homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$. Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_2 en w_2, z_3 en w_3 y z_4 en w_4.

29. (a) Hallar homografías que transformen

        i. los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$.

        ii. los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.

    (b) Probar que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primera homografía del ítem anterior es la recta $\{\operatorname{Re}(z) = 1\}$.

30. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$, demostrar que la homografía
    $$T(z) = \frac{z - \alpha}{-\overline{\alpha}z + 1}$$
    transforma a la circunferencia $\{|z| = 1\}$ en si misma y a α en 0 ($|\alpha| \neq 1$).

31. Dada una matriz no singular

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \quad \text{donde } \det(A) = ad - bc \neq 0$$

le asignamos la homografía

$$T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Diremos que la matriz A representa a la homografía T_A.

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ no singulares que respresentan las homografías T_A y T_B respectivamente.

(a) ¿Qué homografía representa la matriz AB?

(b) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1}?

(c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?

(d) ¿Cuando dos matrices distintas representan la misma homografía?

32. Demostrar que una homografía $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ si y solo si se puede escribir con coeficientes reales.

33. Hallar homografías que transformen

(a) la circunferencia $|z| = 2$ en $|z+1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i;

(b) el semiplano superior $\mathrm{Im}(z) > 0$ en $|z| < 1$ y α en 0 (donde $\mathrm{Im}(\alpha) > 0$).