# Práctica 2: Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

1. Describir y graficar el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones:

   $(a)$ $f(x,y) = \ln(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)$  $(b)$ $f(x,y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

   $(c)$ $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \sqrt{y - x^2}$  $(d)$ $f(x,y) = \dfrac{1}{x}$

   $(e)$ $f(x,y) = \dfrac{\ln(1 - y + x^2)}{\operatorname{sen} x}$  $(f)$ $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

   $(g)$ $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}$  $(h)$ $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{\ln(1 - x^2)}$

2. Para cada valor de $c \in \mathbb{R}$ graficar, si es posible, el conjunto

   $$\{(x,y) : f(x,y) = c\}.$$

   Estos conjuntos son las **curvas de nivel** de $f(x,y)$.

   $(a)$ $f(x,y) = x + y$  $(b)$ $f(x,y) = x^2 + y^2$

   $(c)$ $f(x,y) = \sqrt{xy}$  $(d)$ $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$

   $(e)$ $f(x,y) = x^2 - y^2$

3. Estudiar las superficies de $\mathbb{R}^3$ representadas por las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x,y)$.

   $(a)$ $z = 2x^2 + y^2$  $(b)$ $z^2 = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{2}$  $(c)$ $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

   $(d)$ $3x + 2y - z = 0$  $(e)$ $z^2 = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3} - 2$  $(f)$ $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$

   $(g)$ $x^2 + y^2 = 4z^2$

4. Para cada valor de $c \in \mathbb{R}$ graficar, si es posible, el conjunto

$$\{(x, y, z) : f(x, y, z) = c\}.$$

Estos conjuntos son las **superficies de nivel** de $f(x, y, z)$.

$(a)$ $f(x, y, z) = x + y + z$ $(b)$ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

$(c)$ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ $(d)$ $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2$

---

## Límite y Continuidad

5. ¿A qué distancia de 16 basta tomar $x$ para asegurar que:

$(a)$ $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$? $(b)$ $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}, \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\right)$? $(c)$ $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{4} + \frac{1}{1000}\right)$?

6. Se define la parte entera de un número real $x$ como $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Analizar la existencia de $\lim_{x \to a} f(x)$ para cada $a \in \mathbb{R}$:

$(a)$ $f(x) = x - [x]$ $(b)$ $f(x) = \frac{x}{[x]}$ $(c)$ $f(x) = |x| + [x]$

7. Calcular, si existen, los siguientes límites:

$(a)$ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$ $(b)$ $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 9}$ $(c)$ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen} x$

$(d)$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{\ln(|x|)}$ $(e)$ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ $(f)$ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$

$(g)$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/\tan x}$ $(h)$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ $(i)$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x}$

8. (a) Demostrar, por definición de límite, las siguientes igualdades:

   i. $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (1,0)} x + y = 1$

   ii. $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (-1,8)} xy = -8$

   (b) Encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$\|(x, y) - (-1, 8)\| < \delta \Longrightarrow |xy + 8| < \varepsilon,$$

   para cada caso particular $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/100$ y $\varepsilon = \alpha^2$ $(\alpha \neq 0)$.

9. Probar, por definición de límite, que $y \operatorname{sen}(xy - 6) \to 0$ cuando $(x, y) \to (2, 3)$.

10. Probar que:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \operatorname{sen}(x\cos y) = 0$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy} = 0$ (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{y^2 + \cos(\pi - x)}{y} = \dfrac{8}{3}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} ye^x = 1$ (f) Si $c \neq 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(c,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{x^2 - y^2} = 0$

11. (a) Sea $f : B_r(a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $f$ no se anula sobre $B_r(a,b) \setminus \{(a,b)\}$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$. Probar que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\operatorname{sen}(f(x,y))}{f(x,y)} = 1.$$

(b) Sea $f : B_r(a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = +\infty$. Probar que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\ln(f(x,y))}{f(x,y)} = 0.$$

*Recordar que $B_r(a,b)$ es la bola abierta de $\mathbb{R}^2$ de centro $(a,b)$ y radio $r$.*

12. Calcular:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

13. Analizar la existencia de los límites de las siguientes funciones restringidos a los ejes coordenados.

Luego,

¿es suficiente la información anterior para conocer la existencia del límite doble en el origen? (asegúrese de qué su intuición sea la correcta).

¿En qué casos existe?

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{y}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$

$(e)$ $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{xy+y-x}$ $(f)$ $f(x,y) = |x|^y$

$(g)$ $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ $(h)$ $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

$(i)$ $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2-x^2+1}{x^2-y^2}$ $(j)$ $f(x,y) = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

$(k)$ $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$ $(l)$ $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

$(m)$ $f(x,y) = x\ln\left(x^2+y^2\right)$ $(n)$ $f(x,y) = (x^2+y^2)\ \ln(x^2+y^2)$

$(o)$ $f(x,y) = x\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{y}+y\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$ $(p)$ $f(x,y) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{y}$

14. Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si $(x,y)$ se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$.

$(a)$ $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ $(b)$ $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$

$(c)$ $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ $(d)$ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y)y}{x^4} & \text{si } 0<y<x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

15. Para cada una de las siguientes funciones:

$(a)$ $f(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x)$

$(b)$ $f(x) = x^2-[x^2]$

$(c)$ $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$

$(d)$ $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x/2) & \text{si } |x|\leq 1 \\ |x-1| & \text{si } |x|>1 \end{cases}$

$(e)$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x>0 \\ x^2+1 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$

- Calcular su dominio natural.
- Estudiar la continuidad en cada punto de su dominio natural. Indicar de que tipo son los puntos de discontinuidad, en caso de existir.
- Redefinir la función, si es posible, para que resulte continua en $\mathbb{R}$. En caso de no ser posible, explicar por qué.

16. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4(x+1)}{|x+1|^3+2\,|y|^3} & (x,y)\neq(-1,0)\\ 1 & (x,y)=(-1,0)\end{cases}$$

(a) Probar que $f$ no es continua en $(-1,0)$.

(b) Redefinirla en $(x,y)=(-1,0)$, si es posible, de manera tal que resulte continua en $\mathbb{R}^2$.

17. Consideremos la función

$$f(x,y)=xy\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right).$$

$(a)$ Calcular su dominio natural.

$(b)$ ¿Es posible extender $f$ a $\mathbb{R}^2$ de modo que resulte continua? ¿Por qué?

18. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

$(a)$ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,0)$.

$(b)$ $f(x,y)=\begin{cases}|y|^x(1+x)^y & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \text{ y } x>-1\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,2)$.

$(c)$ $f(x,y)=\operatorname{sen}(x\cos y)$ en $(1,1)$ y $(0,2)$.

$(d)$ $f(x,y)=\begin{cases}x+y & \text{si } x\neq0 \text{ e } y\neq0\\ 1 & \text{si no}\end{cases}$ en $(0,0)$ y $(1,1)$.

$(e)$ $f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } xy\neq0\\ 0 & \text{si } xy=0\end{cases}$ en $(1,0)$ y $(-1,2)$

19. Probar que la función

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{sen}(xy)}{|x-y|}$$

no tiene límite cuando $(x,y)\to(0,0)$.

***Sugerencia:*** En primer lugar calcular el dominio de $f$ y mostrar que 0 es un candidato a límite. Luego, demostrar la no existencia del límite de tres formas distintas:

- PLAN A: Encontrar alguna trayectoria que pase por el origen sobre la cual $f$ no tienda a 0.

- PLAN B: Considerar la sucesión de puntos $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})$, probar que esta sucesión tiende a 0 y calcular el $\lim_{n\to\infty} f(p_n)$.
- PLAN C: Probar si el límite es 0 entonces debe existir un entorno del origen en donde $f$ esté acotada. Mostrar que esto último no puede ocurrir.

20. Analizar la existencia del límite en el origen para

$$f(x,y) = \frac{e^{(x^2+y^3)} - 1}{xy - x + y^2}\ .$$

21. Estudiar la continuidad en el punto $(1,0)$ de

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{(x-1)^2 + y^2|x|} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}.$$

***Sugerencia:*** Probar que si $\|(x-1,y)\| < \frac{1}{2}$, entonces

$$(x-1)^2 + y^2|x| \geq \frac{1}{2}[(x-1)^2 + y^2].$$

Utilizarlo para demostrar el límite por definición.

22. Estudiar la continuidad de $f$ en el origen de coordenadas, siendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 - \tan(x^2y)}{\frac{1}{2}x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

23. Probar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

24. Sabiendo que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x,y) := g(x)$, probar que $f$ es continua en todo punto de la forma $(a,y)$.

Utilizar, adecuadamente, este resultado para demostrar que las siguientes funciones son continuas en $\mathbb{R}^2$:

$(a)$ $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)$

$(b)$ $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2) + e^y$

25. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$(a)\quad f(x,y) = (x^2,\ e^x)$ $\qquad$ $(b)\quad f(x,y) = \left( \dfrac{\text{sen }(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \ , \ \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} \right)$

26. $(a)$ Hallar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x)^2 - e^x = 0$.

$(b)$ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene como imagen a $\text{Im}(f) = [a,b] \cup [c,d]$ $(a < b < c < d)$, entonces... ¿resulta ser continua?.

$(c)$ Demostrar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0,1]$.

$(d)$ Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces es una función constante.

$(e)$ Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

27. $(a)$ Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1 - \|x\|}$. Probar que $f$ es continua y no es acotada.

$(b)$ Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \|x\|$. Probar que $g$ es continua y acotada.

Entonces, ¿alcanza su máximo en $B_1(0)$?.

28. Sea $f(x,y) = \dfrac{\text{sen }(x^2 y)}{\ln(1-x^2)}$

(a) Encontrar el dominio $D$ de $f$ y graficarlo.

(b) Si $(q_1,q_2) \in \partial(D)$, entonces ¿existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(q_1,q_2)} f(x,y)$?.