

Práctica 5:  
Extremos

---

1. Sea  $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ , calcular máximos y mínimos absolutos en el intervalo  $[-5,5]$ . Hacer un gráfico aproximado de la función.
2. La empresa Pejsi quiere fabricar “Narajsi”, un nuevo producto sabor naranja que saldrá al mercado envasado en latitas de volumen  $V$ . ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base y la altura de la lata para que Pejsi minimice el costo de aluminio?
3. (a) Calcular los extremos de  $f(x, y) = x^2 + y^4$  y de  $g(x, y) = x^4 + y^4$ , y en dichos puntos sus hessianos.  
(b) Sea  $f$  de clase  $C^2$  tal que tiene un extremo estricto en  $a \in \mathbb{R}^n$ , ¿es necesariamente  $Hf(a)$  definida positiva o negativa?.
4. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:  
(a)  $f(x, y) = x^2 - y^2$   
(b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$   
(c)  $f(x, y) = xy$   
(d)  $f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$
5. Sea  $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ . Probar que:  
(a)  $(0, 0)$  es un punto de ensilladura.  
(b) el determinante de la matriz  $Hf(0, 0)$  es cero.  
(c)  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(0, 0)$  sobre cada recta que pase por  $(0, 0)$ , es decir, si  $g(t) = (at, bt)$  entonces  $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de  $a, b$ .
6. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ .  
(a) Probar que  $(0, 0)$  es un punto crítico pero no un extremo.  
(b) Probar que  $\pm\sqrt{2}(1, -1)$  son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?
7. Para las siguientes funciones, encontrar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura.  
(a)  $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$   
(b)  $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

(c)  $f(x, y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$

(d)  $f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$

(e)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$

(f)  $f(x, y) = (x - y)^2 + 1 + 2(x - y)$

(g)  $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

(h)  $f(x, y, z) = xy + z^2$

(i)  $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz + z$

(j)  $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

(k)  $f(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$

8. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  tal que:

- $f(0, 1) = 0$ ,
- $\nabla f(0, 1) = (0, 2)$ ,
- $Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Si  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $g(x, y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$ ,

(a) Calcular  $Hg(0, 1)$ .

(b) ¿Tiene  $g$  un extremo relativo en  $(0, 1)$ ?

9. Sea  $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$ .

(a) Probar que el punto  $(0, 0)$  es punto crítico de  $f$  y calcular el hessiano en dicho punto.

(b) Probar que  $f$  a lo largo de cualquier recta que pase por el origen tiene un mínimo en 0.

(c) Muestre que el origen es punto silla de  $f$  y analice porqué esto no contradice al ítem anterior.

**Sugerencia:** considere la curva  $\alpha(t) = (t, \frac{3}{2}t^2)$ .

10. Decidir si existen o no, números reales  $a$  y  $b$  tales que la función

$$f(x, y) = e^{y^4 - x^2} + a(x - y) + b(x - 2)(y - 1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto  $(2, 1)$ .

11. Si el polinomio de Taylor de grado 2 de  $f(x, y)$  en  $(0, 0)$  es

$$P(x, y) = 1 + 2x - y + xy - x^2 + y^2,$$

¿tiene

$$g(x, y) := f(x, y) - 2x + y + x^2y$$

un mínimo local en  $(0, 0)$ ?