

Práctica 9 - Forma de Jordan

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \langle v \rangle_A := \langle v, Av, A^2v \rangle$? (es decir, tal que A tiene un vector cíclico?)
2. Sea $f \in \text{End}_K(K^n)$ tal que f^2 tiene un vector cíclico (es decir, $K^n = \langle v \rangle_{f^2}$). Probar que f tiene un vector cíclico. ¿Vale la recíproca?
3. Calcular el polinomio minimal y el polinomio característico de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

4. Calcular el polinomio minimal para cada una de los endomorfismos siguientes:
 - a) $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[X])$, $f(h) = h' + 2h$
 - b) $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n \times n})$, $f(A) = A^t$
5. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.
6. Sea $\delta \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X])$ el endomorfismo derivación. Probar que δ no admite ningún polinomio minimal.
7. *Matriz Compañera.*
Sea $h = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \in K[\lambda]$. La matriz compañera del polinomio h está definida como

$$C_h = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}.$$

- a) El objetivo de este inciso es probar que $m_{C_h} = \mathcal{X}_{C_h} = h$.
Sea $f \in \text{End}_K(K^n)$ definido por $f(x) = C_h x$. Calcular m_{e_1} . Deducir m_{C_h} y \mathcal{X}_{C_h} .
 - b) Usar esto para dar otra demostración, inductiva, del teorema de Cayley-Hamilton.
8. Determinar la forma y una base de Jordan de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. a) Sea $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ tal que $\mathcal{X}_A = \lambda^6$ y $m_A = \lambda^3$. Determinar las posibles formas de Jordan de A .
- b) Sea $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$. ¿Cuántos bloques tiene la forma de Jordan de A ? ¿Y si $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$ con $\text{rg}(A) = 9$?
10. Decidir si existe (y en caso afirmativo exhibir)
- a) $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ tal que $\text{rg}(A) = 5$, $\text{rg}(A^2) = 3$, $\text{rg}(A^3) = 2$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$.
- b) $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$.
- c) $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$ tal que $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$.
11. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7 \times 7}$?
12. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

14. Sea $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ tal que $m_A = \lambda^6$, y sea $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ una base de Jordan para A . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2 , A^3 , A^4 y A^5 .
15. Sea $f : \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7$ una transformación lineal y sea B una base de \mathbb{C}^7 tal que

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Hallar \mathcal{X}_f y m_f .
- b) Sea $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ un autovalor de f y sea $m = \text{mult}(\lambda_0, \mathcal{X}_f)$. ¿Para qué autovalores λ_0 de f se tiene que $\text{Nu}(\lambda_0 \text{Id} - f) = \text{Nu}((\lambda_0 \text{Id} - f)^m)$?
- c) Para cada autovalor λ_0 de f , ¿cuál es la menor potencia k tal que $\text{Nu}((\lambda_0 \text{Id} - f)^m) = \text{Nu}((\lambda_0 \text{Id} - f)^k)$?
- d) Para cada λ_0 autovalor de f , notamos por f_{λ_0} la restricción de $\lambda_0 \text{Id} - f$ a $\text{Nu}(\lambda_0 \text{Id} - f)^m$. Calcular $\dim(\text{Im}(f_{\lambda_0}))$ y $\dim(\text{Im}(f_{\lambda_0}^2))$.

16. Hallar la forma y una base de Jordan de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz siguiente para cada valor de $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = \langle e^x, x e^x, x^2 e^x, e^{2x} \rangle$. Sea $\delta \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ definido por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ .

19. Determinar las posibles formas de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en los casos:

a) $\mathcal{X}_A = (\lambda - 2)^4(\lambda - 3)^2$ y $m_A = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^2$

b) $\mathcal{X}_A = (\lambda - 7)^5$ y $m_A = (\lambda - 7)^2$

c) $\mathcal{X}_A = (\lambda - 2)^7$ y $m_A = (\lambda - 2)^3$

d) $\mathcal{X}_A = (\lambda - 3)^4(\lambda - 5)^4$ y $m_A = (\lambda - 3)^2(\lambda - 5)^2$

20. Determinar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$ que cumple

$$m_A = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)^2(\lambda - \lambda_4)^3, \quad \text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j,$$

$$\text{rg}(A - \lambda_1 \text{Id}) = 11, \quad \text{rg}(A - \lambda_1 \text{Id})^2 = 10, \quad \text{rg}(A - \lambda_3 \text{Id}) = 12, \quad \text{rg}(A - \lambda_3 \text{Id})^2 = 10, \quad \text{rg}(A - \lambda_4 \text{Id}) = 13.$$

21. Determinar la forma de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 distintos tal que:

$$\text{rg}(A - \lambda_1 \text{Id}) = 13, \quad \text{rg}(A - \lambda_1 \text{Id})^2 = 11, \quad \text{rg}(A - \lambda_1 \text{Id})^3 = 10, \quad \text{rg}(A - \lambda_1 \text{Id})^4 = 10$$

$$\text{rg}(A - \lambda_2 \text{Id}) = 13, \quad \text{rg}(A - \lambda_2 \text{Id})^2 = 11, \quad \text{rg}(A - \lambda_2 \text{Id})^3 = 10, \quad \text{rg}(A - \lambda_2 \text{Id})^4 = 9,$$

$$\text{rg}(A - \lambda_3 \text{Id}) = 13, \quad \text{rg}(A - \lambda_3 \text{Id})^2 = 12, \quad \text{rg}(A - \lambda_3 \text{Id})^3 = 11.$$

22. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales la matriz A es nilpotente y su forma de Jordan está formada por exactamente 3 bloques.

b) Para cada valor hallado, calcular la forma y una base de Jordan de A .

23. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- a) Hallar la forma de Jordan y una base de Jordan para A .
 b) Hallar subespacios S_1, S_2, \dots, S_6 A -invariantes de \mathbb{R}^7 tales que $\dim(S_i) = i$ y $S_i \oplus S_{7-i} = \mathbb{R}^7$.

24. Decidir si las matrices siguientes son semejantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

25. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ tales que $\chi_A = \chi_B = (\lambda - 1)^3(\lambda - 3)^2$ y $m_A = m_B$. ¿Implica esto que A es semejante a B ?

26. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- a) Probar que $\text{rg}(A) = 1$ si y solo si existen $x, y \in \mathbb{C}^n$ vectores columna no nulos tales que $A = x \cdot y^t$.
 b) Calcular en ese caso todos los autovalores y autovectores de A .
 c) Calcular en ese caso todas las posibles formas de Jordan de A .

27. a) Sea J la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que J es semejante a J^t .

b) Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

28. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $B \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ tal que $B^2 = A$.

29. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 12 & 0 \end{pmatrix}$, probar que existe una matriz $B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ no diagonalizable tal que $B^2 = A$.

30. Calcular para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

31. Hallar una fórmula general para el término general a_n de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida por:

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta, a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ donde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

32. a) Calcular e^{At} para las matrices A siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1, y(0) = 2$.

c) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) \\ z'(t) = -x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales arbitrarias $x(0) = a, y(0) = b, z(0) = c$.