

Práctica 8 - Transformaciones autoadjuntas

1.
 - a) Sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ definido por $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. Hallar todos los subespacios de \mathbb{R}^3 que sean f -invariantes.
 - b) Sea $f_{\theta} \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ la rotación de ángulo θ , es decir determinada por $e_1 \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$, $e_2 \mapsto (-\sin \theta, \cos \theta)$. Probar que, para todo $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f_{θ} no es diagonalizable y hallar todos los subespacios de \mathbb{R}^2 que sean f_{θ} -invariantes.
 - c) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_{\theta} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ determinada por $e_1 \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$, $e_2 \mapsto (-\sin \theta, \cos \theta)$. ¿Es g_{θ} diagonalizable? Hallar todos los subespacios de \mathbb{C}^2 que sean g_{θ} -invariantes.
2. Sea $f \in \text{End}_K(V)$, donde V es un K -e.v. de dimensión n , un endomorfismo nilpotente tal que $f^n = 0$ pero $f^{n-1} \neq 0$.
 - a) Probar que si $v \notin \text{Nu}(f^{n-1})$, entonces para $0 \leq k \leq n$ se tiene que $f^k(v) \in \text{Nu}(f^{n-k})$ pero $f^k(v) \notin \text{Nu}(f^{n-k-1})$, y que $\mathcal{B} = \{v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)\}$ es una base de V .
 - b) Determinar $[f]_{\mathcal{B}}$.
 - c) Probar que para todo i , $0 \leq i \leq n$, existe un subespacio S_i de \mathbb{R}^n de dimensión i que es f -invariante.
 - d) Probar que existe un hiperplano de \mathbb{R}^n que es f -invariante pero que no admite un complemento f -invariante.
3. Calcular f^* para cada uno de los endomorfismos siguientes:
 - a) $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$
 - b) $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$
 - c) $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, para $\mathcal{B} = ((1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1))$,
 - d) $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[X])$ $f(p) = p'$, donde $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$.
 - e) $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n \times n})$, $f(A) = P^{-1}AP$ donde $P \in GL(n, \mathbb{C})$ y $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$.
4. Sea $h \in \mathbb{R}[X]$ y sea $\mu_h \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X])$ definido por $\mu_h(g) = hg$, $\forall g \in \mathbb{R}[X]$. Probar que existe, y calcular, μ_h^* para el producto interno $\langle g_1, g_2 \rangle = \int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx$.
5. Sea (V, \langle, \rangle) un K -e.v. con p.i. de dimensión finita. Probar que:
 - a) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$, $\forall f_1, f_2 \in \text{End}_K(V)$ y $(kf)^* = \bar{k}f^*$, $\forall f \in \text{End}_K(V)$, $k \in \mathbb{C}$;
 - b) $(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^*$, $\forall f_1, f_2 \in \text{End}_K(V)$;
 - c) $f \in \text{Aut}_K(V) \Rightarrow f^* \in \text{Aut}_K(V)$, y $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$;
 - d) $(f^*)^* = f$, $\forall f \in \text{End}_K(V)$;
 - e) $f^* \circ f = 0 \Rightarrow f = 0$, $\forall f \in \text{End}_K(V)$.
6. Sea (V, \langle, \rangle) un K -e.v. con p.i. de dimensión finita y sea $f \in \text{End}_K(V)$. Probar que $\text{Im}(f^*) = (\text{Nu}(f))^{\perp}$ y $\text{Nu}(f^*) = (\text{Im}(f))^{\perp}$.

7. Sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ definido por $f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y)$. Hallar un producto interno \langle, \rangle en \mathbb{R}^3 para el cual f sea autoadjunta.
8. Sea (V, \langle, \rangle) un K -e.v. con p.i. de dimensión finita y sea S un subespacio de V . Probar que la proyección ortogonal $p_S : V \rightarrow V$ sobre S es autoadjunta, y calcular sus autovalores.
9. a) Encontrar una matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal tal que $U^t A U$ sea diagonal para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

- b) Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria tal que $U^* A U$ sea diagonal, para

$$\begin{pmatrix} 3 & 2i & 1 \\ -2i & 3 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Sea (V, \langle, \rangle) un \mathbb{C} -e.v. con p.i. de dimensión finita y sea $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Se dice que f es *normal* cuando $f \circ f^* = f^* \circ f$. El objetivo de este ejercicio es probar que f se diagonaliza en una base ortonormal si y solo si f es normal.

- a) Probar que si f es autoadjunta o unitaria, entonces f es normal.
- b) Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.
- c) Probar que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:
- 1) $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|, \forall v \in V$. En particular, $\text{Nu}(f) = \text{Nu}(f^*)$.
 - 2) $\lambda \text{Id} - f$ es normal, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
 - 3) $f(v) = \lambda v \Rightarrow f^*(v) = \bar{\lambda} v$.
 - 4) $\text{Nu}(\lambda \text{Id} - f)$ es f^* -invariante.
- d) Probar que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores. (Sugerencia: observar que $(\text{Nu}(\lambda \text{Id} - f))^\perp$ es f -invariante y f^* -invariante).
- e) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables en \mathbb{C} . Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable en \mathbb{R} .

11. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

- a) f rotación en \mathbb{R}^2 de ángulo $\pi/3$.
- b) f simetría en \mathbb{R}^2 respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.
- c) f simetría en \mathbb{R}^3 respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
- d) f rotación en \mathbb{R}^3 de ángulo $\pi/4$ y eje $\langle(1, 0, 1)\rangle$.

12. Sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

13. Sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

a) Probar que f es una rotación.

b) Hallar $g \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $g \circ g = f$.

14. Sea f una rotación en \mathbb{R}^3 de ángulo $\pi/2$ y eje $\langle(2, -2, -1)\rangle$ Hallar $f(4, -1, 1)$.

15. Determinar si es posible una rotación f en \mathbb{R}^3 tal que

$$f(\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}) = \langle(1, 1, -1), (2, -1, 1)\rangle.$$

16. Determinar y clasificar todas las transformaciones ortogonales

a) f en \mathbb{R}^2 tales que $f(3, 4) = (5, 0)$.

b) f en \mathbb{R}^3 tales que $f(1, -1, 0) = (1, -1, 0)$ y $f(3, 1, 1) = (-1, -3, -1)$.

17. Una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se llama *isometría* si satisface que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

a) Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría tal que $f(0) = 0$, f resulta una transformación lineal y además f es ortogonal.

b) Deducir que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría si y sólo si existen g transformación ortogonal en \mathbb{R}^2 y $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) = g(x) + v$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.