Práctica 7: Autovalores y autovectores - Diagonalización

---

1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matrices A siguientes (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$). En cada caso decidir si la matriz es diagonalizable, y de ser posible, exhibir una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Para cada una de las matrices $A \in K^{n\times n}$ del ejercicio anterior, sea $\mathcal{E}$ una base de V, donde V es un K-e.v. de dimensión n, y sea $f \in \mathrm{End}(V)$ dado por $[f]_{\mathcal{E}} = A$. Decidir si es posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal, y en caso afirmativo, calcular $C(\mathcal{B}, \mathcal{E})$.

3. Hacer lo mismo que en los dos ejercicios anteriores para las siguientes matrices, discutiendo según los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ (analizar por separado los casos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

4. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que para toda fila F_i, la suma de sus coeficientes es igual a 1. Probar que 1 es autovalor de A y encontrar un autovector correspondiente.

6. Probar que si λ es autovalor de A si y solo si λ es autovalor de A^t. ¿Con el mismo autovector?

7. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ el endomorfismo derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector asociado.

8. *a*) Diagonalizar las siguientes matrices encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in K^{n\times n} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   b) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, calcular $\det(A_\alpha)$ donde

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \alpha-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

   (Sug: observar que $\det(A_\alpha) = \mathcal{X}_A(\alpha)$, donde A es la matriz del inciso *a*))

9. Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable y calcular el polinomio característico $\mathcal{X}_f$ de f.

10. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$ tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

11. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo nilpotente. Es decir existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (k veces) es el endomorfismo nulo. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es f diagonalizable?

12. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que si para todo $x \in K^n$, x y Ax son linealmente dependientes, entonces $A = c \cdot \mathrm{Id}_n$ para algún $c \in K$.

13. Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$ para las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Determinar en cada caso si es posible encontrar $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $B^2 = A$. ¿Y en $\mathbb{C}^{2\times 2}$?

14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-7y + z, 4y, -2x + y + 3z).$$

   a) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_\mathcal{B}$ sea diagonal.
   b) Calcular $f^k := f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k veces), $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
   c) Hallar, si es posible, una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

15. Se define la siguiente sucesión de números enteros de la manera siguiente:

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_2 := 1, \quad \text{y} \quad a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n,\ \forall\, n \geq 0.$$

   Hallar una fórmula para el término a_n, $n \in \mathbb{N}$.

16. Encontrar una fórmula general para x_n e y_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, en función de x_0 e y_0:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 6\,x_n + 2\,y_n \\ y_{n+1} & = & 2\,x_n + 3\,y_n \end{array} \right. .$$

17. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Probar que $A^n \to 0$ (es decir:$(A^n)_{ij} \to 0$, $1 \le i, j \le 3$).

18. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

    a) $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 8x(t) + 10y(t) \\ y'(t) & = & -5x(t) - 7y(t) \end{array} \right. .$

    b) $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) + 3y(t) \end{array} \right. ,$ con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

19. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times m}$.

    a) Probar que las matrices de $K^{(m+n)\times(m+n)}$ $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ son semejantes.

    b) Deducir que, si $n = m$, $\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$.

20. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

    a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\;P = X - 1\,,\;\; P = X^2 - 1\,,\;\; P = (X-1)^2$

    b) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - iX^2 + 1 + i$

21. *a*) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $\operatorname{tr}(A) = -4$. Calcular los autovalores de A, sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8.

    b) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3I_4$. Hallar los restantes autovalores de A.

22. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

    a) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5\,\mathrm{Id}_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

    b) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    c) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de Id_2.

23. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \operatorname{End}_K(V)$. Probar que f es un automorfismo si y solo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo, y en ese caso expresar f^{-1} en función de f, $f \circ f$ etc.

24. *a*) Exhibir una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisfaga $A^2 + \mathrm{Id}_n = 0$.

    b) Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisface $A^2 + \mathrm{Id}_n = 0$, entonces A es inversible, no tiene autovalores reales y n tiene que ser par.

25. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$. Probar que existe una base $\mathcal{B}$ ortonormal de $\mathbb{C}^n$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior.

26. Sea $A \in K^{m\times m}$ y $B \in K^{n\times n}$. Probar que $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ se diagonaliza en $K^{(m+n)\times(m+n)}$ si y solo si A y B se diagonalizan.

27. Sean $A, B \in K^{n\times n}$ dos matrices que conmutan.

    a) Probar que si x es un autovector de A con autovalor λ, entonces Bx también lo es.

    b) Probar que si A y B son diagonalizables, entonces se las puede diagonalizar usando una misma base para ambas.

28. ($\star$) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz con n autovalores distintos.

    a) Probar que si A es diagonal y $B \in K^{n\times n}$ conmuta con A, entonces B es diagonal también. Deducir que en ese caso existe un polinomio $h \in K[\lambda]$ con $\mathrm{gr}(h) < n$ (o $h = 0$) tal que $B = h(A)$.

    b) Probar qus $B \in K^{n\times n}$ conmuta con A si y solo si existe $h \in K[\lambda]$ tal que $B = h(A)$.

29. ($\star$) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz con traza nula. Probar que A es semejante a una matriz B cuyos coeficientes de la diagonal son todos nulos.
    Sugerencia: existe $x \in K^n$ tal que x y Ax son linealmente independientes (cf. Ej. 12). Completar x y Ax a una base de K^n y considerar la matriz de la multiplicación por A en esa base.