

Práctica 5: Espacios vectoriales con producto interno

1. Calcular la norma de cada uno de los vectores siguientes, y normalizarlos

$$a) u = (0, 1, 2), v = (-1, 1, 1), w = 3u, z = u + v \quad b) u = (i, 0, 0), v = (1, 0, i)$$

2. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos

$$a) A = (1, 2, 3), B = (4, 1, -2)$$

$$b) A = (i + 1, i, i), B = (1, i, 0)$$

3. a) Sean $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -1, 1)$. Hallar $w \in \mathbb{R}^3$, $w \neq 0$ tal que $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$. ¿Es único?
- b) Sea $u = (1, -1)$. Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v \rangle = 0$.
- c) Sea $u = (0, 0, 2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle v, u \rangle = 0$.
- d) Sean $u = (1, 2)$, $v = (-1, 1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u, w \rangle = 1$ y $\langle v, w \rangle = 3$. Hallar w .

4. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales o no

$$a) v = (1, 1, 1), w = (1, 0, 1)$$

$$b) v = (1, -2, 4), w = (-2, 1, 1)$$

$$c) v = (1, i, 1), w = (i, 0, 1)$$

$$d) v = (1, i, 1), w = (i, 1, 0)$$

5. Calcular el ángulo entre los siguientes pares de vectores

$$a) v = (1, 1), w = (1, 0)$$

$$b) v = (3, 2, -1), w = (0, 1, 2)$$

6. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un e.v. con un producto interno arbitrario. Probar que:

$$a) \text{ Si } \langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle, \forall u \in V, \text{ entonces } v = w.$$

$$b) |\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \iff \{u, v\} \text{ es un conjunto linealmente dependiente.}$$

¿Vale que si $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ para algún $u \neq 0$, entonces $v = w$?

7. Determinar si los siguientes son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz de Gram en la base canónica del espacio correspondiente.

$$a) \Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_2$$

$$b) \Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$$

$$c) \Phi : K^2 \times K^2 \rightarrow K, \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1, \text{ con } K = \mathbb{R} \text{ y } K = \mathbb{C}$$

$$d) \Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 - x_1\bar{y}_2 - x_2\bar{y}_1$$

$$e) \Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$$

$$f) \Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi(x, y) = x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$$

8. Determinar para qué valores de a y b en \mathbb{R}

$$\Phi(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1+b)x_3y_3$$

es un producto interno en \mathbb{R}^3 .

9. Calcular la matriz de Gram en la base canónica $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ del producto interno en $\mathbb{R}_n[X]$ dado por $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.
10. Probar que los siguientes definen productos internos:
- $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^n \times K^n \rightarrow K$, $\langle x, y \rangle = \overline{x^* Q^* Q y}$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$, para $Q \in GL(n, K)$, donde $Q^* = \overline{Q}^t$ y $x^* = \overline{x}^t$.
 - $\langle \cdot, \cdot \rangle_T : V \times V \rightarrow K$, $\langle x, y \rangle_T = \langle T(x), T(y) \rangle$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$ donde V y W son K -e.v., $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un p.i. sobre W y $T : V \rightarrow W$ es un monomorfismo.
11. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V .
- Probar que existe un único producto interno en V para el cual \mathcal{B} resulta ortonormal.
 - Hallarlo para $V = \mathbb{C}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1, i), (-1, i)\}$, y para $V = \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.
12. Sea la recta $S = \langle (3, 4) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ y p la proyección ortogonal sobre S . Hallar:
- El complemento ortogonal S^\perp de S .
 - $p(3, 4)$, $p(-4, 3)$ y $p(2, 1)$.
 - El punto más cercano de la recta S a cada uno de los puntos $(3, 4)$, $(-4, 3)$ y $(2, 1)$, y la distancia de esos puntos a la recta S .
 - Una fórmula explícita para $p(x_1, x_2)$ y la matriz $[p]_{\mathcal{C}}$ de p en la base canónica \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 .
 - Una base ortonormal \mathcal{B} tal que $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
13.
 - Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = ((-1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1))$ de \mathbb{R}^3 para obtener una base ortonormal \mathcal{B}' .
 - Calcular las coordenadas de $v = (1, 1, 1)$ y de $w = (1, 0, 0)$ en \mathcal{B}' .
 - Hallar una base ortonormal de \mathbb{R}^3 que contenga una base del plano
$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

y definir explícitamente la proyección ortogonal sobre ese plano.

 - Calcular el punto de S más cercano a w , y la distancia que los separa. Idem para v .
14. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = ((0, i, 0), (1, 0, i), (0, 0, 1))$ de \mathbb{C}^3 para obtener una base ortonormal \mathcal{B}' .
15. Para los subespacios siguientes hallar el complemento ortogonal, y definir las proyecciones ortogonales sobre esos subespacios
- $\langle (1, 2, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$
 - $\{x \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
 - $\langle (i, 1, 1), (-1, 0, i) \rangle \subseteq \mathbb{C}^3$
 - $\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / \begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\} \subseteq \mathbb{C}^4$.
16. Sea $S = \langle (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Hallar el punto de S más cercano a $(0, 1, 1, 0)$, y la distancia de $(0, 1, 1, 0)$ a S .
17. En $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$, hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

18. En $\mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$,
- Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $(1, X, X^2)$.
 - Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1 \rangle$.
 - Hallar los polinomios constantes más cercanos a X y a X^2 .
19. a) En $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$, hallar el polinomio de grado ≤ 2 más próximo a la función $f(x) = \sin(\pi x)$.
- b) En $C[0, \pi]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x) dx$,
- aplicar el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $(1, \cos x, \sin x)$.
 - hallar el elemento de $\langle 1, \cos x, \sin x \rangle$ más próximo a la función $f(x) = x$.
20. a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica. Probar que $\text{Nu}(A) \perp \text{Im}(A)$.
- b) Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz hermitiana (es decir $A^* = A$). Probar que $\text{Nu}(A) \perp \text{Im}(A)$.
21. La solución de longitud mínima de un sistema compatible

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tal que el sistema $Ax = b$ es compatible.

- Intuitivamente: hacer un dibujo en \mathbb{R}^2 representando $\text{Nu}(A)$ como una recta y representar también el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$. Determinar quién debe ser la solución de longitud mínima (cómo debe ser con respecto a la recta $\text{Nu}(A)$).
- Esta parte prueba que si existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$, $x \perp \text{Nu}(A)$, entonces \bar{x} es la solución de longitud mínima, i.e. $\forall x$ solución, $x \neq \bar{x}$, se tiene $\|\bar{x}\| < \|x\|$: Usando que si $x \neq \bar{x}$, entonces existe $z \in \text{Nu}(A)$ no nulo tal que $x = \bar{x} + z$ (justificar), calcular $\|x\|^2 = \langle \bar{x} + z, \bar{x} + z \rangle$ y concluir (recordar que $\bar{x} \perp \text{Nu}(A)$). (Observar que esto implica en particular que si existe tal \bar{x} , entonces es único.)
- Este parte prueba que siempre existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$, $x \perp \text{Nu}(A)$.
 - Justificar que sin pérdida de generalidad se puede suponer $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \leq n$ y $\text{Rg}(A) = m$.
 - Probar que el sistema que resulta de $Ax = 0, x \perp \text{Nu}(A)$ es cuadrado y tiene como única solución el 0
 - Concluir del ítem anterior que la matriz que describe el sistema $Ax = 0, x \perp \text{Nu}(A)$ es inversible, y por lo tanto $\forall b \in \mathbb{R}^m$ el sistema $Ax = b, x \perp \text{Nu}(A)$ tiene una única solución.
- Encontrar la solución de longitud mínima del sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

22. Desigualdad de Bessel

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un K -e.v. con p.i. (no necesariamente de dimensión finita) y sean $\{v_1, \dots, v_s\}$ un conjunto ortogonal de vectores no nulos de V . Probar que para todo $v \in V$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^s \frac{|\langle v, v_i \rangle|^2}{\|v_i\|^2} \leq \|v\|^2.$$