

Práctica 4: Espacio Dual

1. Sea el subespacio $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* / \varphi(1, -1, 2) = 0\}$ de $(\mathbb{R}^3)^*$. Hallar una base de S .
2. Hallar la base dual de la base $\mathcal{B}$ del K -espacio vectorial V en cada uno de los casos siguientes:
 - a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((1, -1), (2, 0))$
 - b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$
 - c) $V = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B} = (-X + 2, X - 1, X^2 - 3X + 2, X^3 - 3X^2 + 2X)$
3. Sea $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 \quad \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Hallar la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}^*$.

4. Sean f_1, f_2 y $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ las siguientes formas lineales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x) dx \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x) dx \quad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x) dx$$

- a) Probar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.
 - b) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $\mathcal{B}^* = (f_1, f_2, f_3)$.
5. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ y sea $\mathcal{E}^* = (x_1, x_2, x_3) \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
 - a) Calcular las coordenadas de φ en $\mathcal{E}^*$.
 - b) Calcular las coordenadas de φ en la base $\mathcal{B}' = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_1)$ de $(\mathbb{R}^3)^*$.
 - c) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$ y sea $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ la base $\mathcal{B} = ((0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0))$. Encontrar una ecuación para S en la base $\mathcal{B}$.
(Sugerencia: notar que $\mathcal{B}'$ es la base dual de $\mathcal{B}$ y no hacer ninguna cuenta.)
6. Sea $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ la base $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1))$. Encontrar las coordenadas de la base dual de $\mathcal{B}$ en la base dual de la canónica.
7. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n .
 - a) Sea $\varphi \in V^* - \{0\}$. Probar que $\dim(\text{Nu}(\varphi)) = n - 1$.
 - b) Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in V^* - \{0\}$. Probar que

$$\text{Nu}(\varphi_1) = \text{Nu}(\varphi_2) \iff \{\varphi_1, \varphi_2\} \text{ es linealmente dependiente.}$$

- c) Sean $\varphi_i, 1 \leq i \leq r$, formas lineales en V^* y sea $\varphi \in V^*$. Probar que

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Nu}(\varphi_i) \subseteq \text{Nu}(\varphi) \Rightarrow \varphi \in \langle \varphi_1, \dots, \varphi_r \rangle.$$

(Sug: empezar con el caso $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ linealmente independiente.)

- d) Sean $\varphi_i (1 \leq i \leq n)$ formas lineales en V^* . Probar que

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Nu}(\varphi_i) = \{0\} \iff \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ es base de } V^*.$$

8. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por

$$\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)) \text{ y } \mathcal{C} = ((1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1))$$

Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1, -3, 2)$ respecto de $\mathcal{B}^*$, calcular sus coordenadas respecto de $\mathcal{C}^*$.

9. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Hallar una base de $S^\circ \subseteq V^*$ en los siguientes casos:

- a) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \langle (1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, 5, 0) \rangle$
- b) $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$
- c) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_3 = 0, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

10. Sea $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y sea $W = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / AB = 0\}$. Sea $f \in W^\circ$ tal que $f(2) = 0$ y $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 3$. Calcular $f(B)$.

11. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Para los siguientes subespacios S y T de V , determinar una base de $(S + T)^\circ$ y una base de $(S \cap T)^\circ$.

- a) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$, $T = \langle (2, -4, 8, 0), (-1, 1, 2, 3) \rangle$
- b) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 - x_3 = 0, x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$, $T = \langle (2, 1, 3, 1) \rangle$

12. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios tales que $V = S \oplus T$. Probar que $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

13. Sea $\text{tr} : K^{n \times n} \rightarrow K$ la forma lineal traza, y sea $A \in K^{n \times n}$. Se define $f_A : K^{n \times n} \rightarrow K$ como $f_A(X) = \text{tr}(AX)$.

- a) Probar que $f_A \in (K^{n \times n})^*$, $\forall A \in K^{n \times n}$.
- b) Probar que si para todo $X \in K^{n \times n}$ se tiene $f_A(X) = 0$ entonces $A = 0$.
- c) Se define $\gamma : K^{n \times n} \rightarrow (K^{n \times n})^*$ como $\gamma(A) = f_A$. Probar que γ es un isomorfismo.
- d) Sea $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = 3x_{11} - 2x_{12} + 5x_{22}.$$

Encontrar una matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / \gamma(A) = \varphi$.

14. Sean $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$ con $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Para cada i , $0 \leq i \leq n$, se define

$$P_{\alpha_i}(X) = \frac{\prod_{j \neq i} (X - \alpha_j)}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)} \in K_n[X] \quad \text{y} \quad \epsilon_{\alpha_i} : K_n[X] \rightarrow K : \epsilon_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i), \quad \forall P \in K_n[X].$$

- a) Calcular $\epsilon_{\alpha_i}(P_{\alpha_j})$ para $0 \leq i, j \leq n$.
- b) Probar que $\mathcal{B} = (P_{\alpha_0}, \dots, P_{\alpha_n})$ es una base de $K_n[X]$ y que $(\epsilon_{\alpha_0}, \dots, \epsilon_{\alpha_n})$ es su base dual en $(K_n[X])^*$.
- c) Probar que para todo $P \in K_n[X]$, se tiene

$$P = \sum_{i=0}^n P(\alpha_i) P_{\alpha_i}.$$

Dicho de otra manera, el polinomio

$$P = \sum_{i=0}^n \beta_i P_{\alpha_i}$$

es el único polinomio en $K[X]$ de grado menor o igual que n que satisface que para todo i , $0 \leq i \leq n$, se tiene que $P(\alpha_i) = \beta_i$. Este polinomio se llama el *polinomio interpolador de Lagrange*.

d) Probar que existen números reales $a_0, \dots, a_n$ tales que, para todo $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i P(\alpha_i).$$

(Sug: plantear $a_i = \int_0^1 P_{\alpha_i}(x) dx$.)

Hallar a_0, a_1 y a_2 en el caso en que $n = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = 0$.

15. Sean V y W K -espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Se define la función $f^t : W^* \rightarrow V^*$ de la siguiente manera:

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f, \quad \forall \varphi \in W^*.$$

f^t se llama la función *transpuesta* de f .

- a) Verificar que efectivamente $f^t(\varphi) \in V^*$ y probar que f^t es una transformación lineal.
- b) Probar que $(\text{Im}(f))^\circ = \text{Nu}(f^t)$ y que $\text{Im}(f^t) = (\text{Nu}(f))^\circ$ (Sug: probar que $\text{Im}(f^t) \subseteq (\text{Nu}(f))^\circ$).
- c) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^3$ y sea $f(x, y) = (2x - y, 3x, x - 2y)$.
Si $\mathcal{B} = ((1, 2), (1, 3))$ y $\mathcal{C} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$, calcular $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ y $[f^t]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*}$.
- d) Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases de V y W respectivamente, probar que

$$[f^t]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*} = ([f]_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^t.$$

- 16. Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo de un K -espacio vectorial V de dimensión finita. Mostrar que f posee núcleo no trivial si y solo si f^t posee núcleo no trivial.
- 17. Sea V un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial. Sean $f, g \in V^*$ tales que $f \cdot g \in V^*$. Probar que $f = 0$ ó $g = 0$.
- 18. Sea V un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión finita. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$ vectores no nulos. Probar que existe una forma lineal $f \in V^*$ tal que $f(v_i) \neq 0 \forall i, 1 \leq i \leq n$.