

Práctica 2: Espacios Vectoriales

1. Sea V un espacio vectorial sobre K , $k \in K$, $v \in V$. Probar las siguientes afirmaciones:

- a) $k \cdot 0_V = 0_V$,
 b) $k \cdot v = 0_V \Rightarrow k = 0_K$ ó $v = 0_V$,
 c) $-(-v) = v$,
 d) $-0_V = 0_V$.

2. Probar en cada caso que el conjunto V con la suma $\oplus$ y el producto por escalares $\otimes$ definidos es un espacio vectorial sobre K .

a) $V = \mathbb{R}_{>0}$, $K = \mathbb{Q}$, con:

$$a \oplus b = ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (m/n) \otimes a = a^{m/n}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_{>0}, m/n \in \mathbb{Q}.$$

b) Dado X un conjunto, sea $V = K^X = \{f : X \rightarrow K \text{ tal que } f \text{ es una función}\}$ con:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in X.$$

$$(k \otimes f)(x) = k \cdot f(x), \quad \forall x \in X.$$

3. En cada caso, encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ tal que:

- a) Sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares.
 b) Sea cerrado para la multiplicación por escalares pero no para la suma y para la resta.

4. Mostrar que los siguientes son espacios vectoriales, verificando que son subespacios de espacios vectoriales conocidos. Explicitar la suma y el producto por escalares en cada caso.

- a) $K_n[X] := \{f \in K[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq n\}$
 b) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''(1) = f(2)\}$
 c) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f'' + 3f' = 0\}$
 d) $\{f \in C(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x) dx = 0\}$
 e) $K^{(\mathbb{N})} := \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0, \forall k \geq n\}.$

5. Mostrar que $\{f \in K[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \geq 2\}$ no es un subespacio de $K[X]$.

6. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T \text{ ó } T \subseteq S$.

7. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes K -espacios vectoriales

- a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x + y - z = 0; x - y = 0\}$, $K = \mathbb{Q}$,
 b) $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = -A^t\}$, $K = \mathbb{R}$,
 c) $\{A \in \mathbb{C}^{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}$, $K = \mathbb{C}$,
 d) $K_n[X]$,
 e) $\{f \in \mathbb{R}_4[X] : f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$, $K = \mathbb{R}$,
 f) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''' = 0\}$, $K = \mathbb{R}$,
 g) $\mathbb{C}^n$, $K = \mathbb{R}$.

8. Sea V un K -espacio vectorial y sean $v, w \in V$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

- a) $\langle v, w \rangle = \langle v, w + 5v \rangle$.
- b) $\langle v, w \rangle = \langle v, aw + bv \rangle, \forall a, b \in K$.
- c) $\langle v, w \rangle = \langle v, aw + bv \rangle, \forall a \in K - \{0\}, b \in K$.
- d) $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_3, v_4, w \rangle \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$.
- e) $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \Leftrightarrow w \in \langle v_1, v_2 \rangle$.

9. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K .

- a) $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ en $\mathbb{C}^2$ para $K = \mathbb{R}$ y para $K = \mathbb{C}$.
- b) $\{(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1\}$ en $K[X]$
- c) $\{\sin x, \cos x, x \cos x\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$
- d) $\{e^x, x, e^{-x}\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$
- e) $u = (1, 0, 1, 0, 1, \dots), v = (0, 1, 0, 1, 0, \dots), w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ en $K^{\mathbb{N}}$

10. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos es linealmente independiente.

- a) $\{(1, 2, k), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - k)\} \subset \mathbb{R}^3$
- b) $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$
- c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$

11. Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R} \iff \{v_1, \dots, v_r\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

12. Hallar una base y la dimensión de los siguientes $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales.

- a) $\langle (1, 4, -2, 1), (1, -3, -1, 2), (3, -8, -2, 7) \rangle$
- b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
- c) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(2) = f(-1)\}$
- d) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(2) = f'(2) = 0\}$
- e) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i = a_j, \forall i, j\}$

13. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $K^{n \times n}$ y calcular su dimensión.

- a) $\{A \in K^{n \times n} / A = A^t\}$ (matrices simétricas)
- b) $\{A \in K^{n \times n} / A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas), $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$,
- c) $\{A \in K^{n \times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)
- d) $\{A \in K^{n \times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales)
- e) $\{A \in K^{n \times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = A_{22} = \dots = A_{nn}\}$ (matrices escalares)
- f) $\{A \in K^{n \times n} / \text{tr}(A) = 0\}$

14. Para cada una de las matrices A siguientes sobre $\mathbb{R}$, determinar su espacio fila $E_F(A)$, su espacio columna $E_C(A)$, su espacio nulo $N(A)$, el rango fila $\text{rg}_F(A)$, el rango columna $\text{rg}_C(A)$ y la dimensión de $N(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

15. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K -espacio vectorial V indicado.

a) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$

b) $\{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\}$, $V = \mathbb{R}_3[X], K = \mathbb{R}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{C}$ y $K = \mathbb{R}$.

16. Extraer una base de los siguientes subespacios vectoriales, de cada uno de los sistemas de generadores dados.

a) $\langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subset \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$

b) $\langle X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 \rangle \subset \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$

c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{C}$

17. Hallar la dimensión de los siguientes $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales, para cada $k \in \mathbb{R}$

a) $\langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k) \rangle$

b) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

c) $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

18. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle$$

19. Dados los subespacios $S = \langle (1, 2, 1, 0), (2, 1, 0, 1) \rangle$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$, hallar un subespacio $U \subset \mathbb{R}^4$ de dimensión 2 que satisface $S \cap T \subset U \subset T$.

20. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V . Determinar si la suma es directa.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$

c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$ y $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$

d) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(1) = 0\}$ y $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$

e) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = f''(0) = 0\}$

21. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$.
22. En cada caso siguiente, probar que S y T son subespacios del K -espacio vectorial V que satisfacen $S \oplus T = V$.
- $V = K^K$, $S = \{f \in K^K : f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in K^K : f \text{ es constante}\}$
 - $V = K^{n \times n}$, $S = \{A \in K^{n \times n} : A = A^t\}$ y $T = \{A \in K^{n \times n} : A = -A^t\}$ para K un cuerpo tal que $2 \neq 0$ en K .
23. Para cada subespacio $S \subseteq V$ dado, hallar un subespacio $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$.
- $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle$, $V = \mathbb{R}^4$
 - $S = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$
 - $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$, $V = \mathbb{R}_4[X]$
24. Mostrar que si S, T son subespacios de $\mathbb{R}^3$ tales que $\dim S = \dim T = 2$, entonces existe $v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.
25. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (i.e. un subespacio de dimensión $n - 1$).
- Probar que $\forall v \notin T$, $T \oplus \langle v \rangle = V$.
 - Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.
 - Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.
26. Determinar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}$ en los siguientes casos:
- $V = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$, $v = (1, 2, -1)$ y $v = (x_1, x_2, x_3)$
 - $V = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{B} = \{3, X + 1, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$, $v = 2X^2 - X^3$
 - $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
27. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sean B, B' y B'' bases de V .
Probar que $C_{BB''} = C_{B'B''}C_{BB'}$. Deducir que $C_{BB'}$ es una matriz inversible con $C_{BB'}^{-1} = C_{B'B}$.
28. Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ dos bases de K^n . Sea M la matriz cuyas columnas son $v_1, \dots, v_n$ y sea N la matriz cuyas columnas son $w_1, \dots, w_n$ (ordenadamente). Probar que $C_{BB'} = N^{-1}M$.
29. Dadas la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de K^3 , hallar:
- una base B_1 de K^3 tal que $M = C_{B_1 B}$.
 - una base B_2 de K^3 tal que $M = C_{B B_2}$.