Práctica 1: Sistemas de Ecuaciones Lineales - Matrices

En todas las prácticas, K es un cuerpo; en general $K = \mathbb{Q}$ (los números racionales), $\mathbb{R}$ (los números reales) o $\mathbb{C}$ (los números complejos)

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados sobre $K = \mathbb{R}$. ¿Cambia algo si $K = \mathbb{Q}$? ¿Y si $K = \mathbb{C}$?

a) $\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + x_3 &=& 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &=& -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 &=& 1 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + x_3 &=& 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 &=& 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{lcr} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &=& 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &=& 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 &=& 0 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{lcr} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &=& 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &=& 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_5 &=& 0 \end{array}\right.$

f) $\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 - x_3 &=& 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &=& 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 1 \\ x_2 + x_3 &=& 1 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 - x_3 &=& 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &=& 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 0 \\ x_2 + x_3 &=& 1 \end{array}\right.$

Verificar que en cada caso, el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo es igual a una solución particular más el conjunto de soluciones del homogéneo asociado.

Cuando exista solución, expresar el lado derecho del sistema como combinación lineal de los vectores columna de la matriz asociada.

2. Determinar los $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema admite solución.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 &=& \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &=& \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &=& \alpha_3 \end{array}\right.$$

3. Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + kx_2 - x_3 &=& 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 &=& -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 &=& 2 \end{array}\right.$$

Ídem, con el sistema homogéneo asociado.

4. Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} i\,x_1 - (1+i)x_2 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2i\,x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases}$$

5. Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 2 \\ 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 1 \end{cases}$$

6. Encontrar un sistema de ecuaciones lineales a coeficientes reales cuya solución general sea $(1,1,0) + \lambda(1,2,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Matrices

7. *a*) Sea $A \in \mathrm{K}^{m\times n}$ y sea $e_i \in \mathrm{K}^n$ el vector columna que tiene un 1 en el lugar i y 0 en los otros lugares. Calcular $A\,e_i$.

   b) Probar que si $A \in \mathrm{K}^{m\times n}$ satisface que $A\,x = 0, \forall\, x \in \mathrm{K}^n$, entonces $A = 0$.

   c) Probar que si $A, B \in \mathrm{K}^{m\times n}$ satisfacen que $A\,x = B\,x, \forall\, x \in \mathrm{K}^n$, entonces $A = B$.

8. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$. Probar que si $A \in \mathrm{K}^{m\times n}$, $B \in \mathrm{K}^{n\times r}$ con $B = (b_{ij})$ y, para $1 \le j \le r$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ (la columna j-ésima de B), entonces $A \cdot B = (\,A\cdot B_1 \mid \ldots \mid A \cdot B_r)$.

   Es decir, $A \cdot B_j$ es la columna j-ésima de $A \cdot B$.

9. Si A es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz B, AB tiene una fila de ceros? (siempre que AB esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?

10. Sean $A, B \in \mathrm{K}^{n\times n}$.

    a) Probar que si A y B son triangulares superiores, entonces AB es triangular superior.

    b) Probar que si A es estrictamente triangular superior (es decir $A_{ij} = 0$ si $i \ge j$), entonces $A^n = 0$.

11. Cuando sea posible, calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

    a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

    b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, *c*) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

12. Exhibir matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \neq 0$, tales que $A^2 = -I_2$ y $B^2 = 0$.

13. Sean A, B y $C \in \mathrm{K}^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Mostrar un contrajemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

    a) $(AB)^2 = A^2B^2$,

    b) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$,

    c) $AB = AC$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$,

    d) $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$,

    e) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I_n$,

    f) $A^j = 0$ para algún $j \geq 2 \Rightarrow A = 0$,

    g) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

    h) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

    Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $A, B \in \mathrm{K}^{n\times n}$ para que valga la igualdad en los incisos *g*) y *h*).

14. Caracterizar el conjunto $\{A \in \mathrm{K}^{3\times 3} / \, AB = BA \, , \forall \, B \in \mathrm{K}^{3\times 3}\}$.

15. *a*) Sean $A \in \mathrm{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathrm{K}^{n\times p}$. Probar que $(A\,B)^t = B^t\,A^t$.

    b) Sean $A \in \mathrm{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathrm{K}^{n\times m}$. Probar que $\mathrm{tr(A\,B)} = \mathrm{tr(B\,A)}$.

16. *a*) Sea $A \in \mathrm{K}^{m\times n}$. Probar que $A\,A^t \in \mathrm{K}^{m\times m}$ y $A^t\,A \in \mathrm{K}^{n\times n}$ son matrices simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A\,A^t \neq A^t\,A$ para $m = n$.

    b) Sean $A, B \in \mathrm{K}^{n\times n}$ matrices simétricas. ¿Vale que $A\,B$ es simétrica?

    c) Para $\mathrm{K} = \mathbb{R}$, probar que: $A = 0 \Leftrightarrow A\,A^t = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr(A\,A^t)} = 0$.

17. Sean A, $A' \in \mathrm{K}^{n\times n}$; B, $B' \in \mathrm{K}^{n\times m}$; C, $C' \in \mathrm{K}^{m\times n}$ y D, $D' \in \mathrm{K}^{m\times m}$.

    Sean M, $M' \in \mathrm{K}^{(n+m)\times(n+m)}$ definidas por $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$.

    Entonces $M \cdot M' = \begin{pmatrix} A\cdot A' + B\cdot C' & A\cdot B' + B\cdot D' \\ C\cdot A' + D\cdot C' & C\cdot B' + D\cdot D' \end{pmatrix}$.

Matrices elementales e inversibles

18. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

    a) Si A, $B \in \mathrm{K}^{n\times n}$ son inversibles entonces $A + B$ es inversible.

    b) Si $\mathrm{tr(A)} = 0$ entonces A no es inversible.

    c) Si A es nilpotente (es decir, $\exists\, j \in \mathbb{N} \;/\; A^j = 0$) entonces A no es inversible.

19. Sea $A \in \mathrm{K}^{m\times m}$ inversible y sean B, $C \in \mathrm{K}^{m\times n}$. Probar:

   a) $AB = AC \;\Rightarrow\; B = C$ *b*) $AB = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$.

20. Sea $A \in \mathrm{K}^{n\times n}$ inversible. Probar que A^t es inversible y que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

21. Para cada i, j $(1 \le i, j \le n)$, sea $E^{ij} \in \mathrm{K}^{n\times n}$ la matriz:

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases} .$$

   Las matrices E^{ij} se llaman **matrices canónicas** de $\mathrm{K}^{n\times n}$.

   a) Si $a \in \mathrm{K} - \{0\}$ y $1 \le i \le n$, se define $M_i(a) \in \mathrm{K}^{n\times n}$ como

$$M_i(a) = E^{11} + E^{22} + ... + a.E^{ii} + E^{(i+1)(i+1)} + ... + E^{nn} = I_n + (a-1).E^{ii}.$$

   Escribir todas las posibles $M_i(a)$ para $n = 2, 3, 4$ $(a \in \mathrm{K})$.

   b) Sean $1 \le i, j \le n$, con $i \ne j$. Se define la matriz $P^{ij} \in \mathrm{K}^{n\times n}$ como la matriz que se obtiene permutando la fila i con la fila j de la matriz identidad. Comprobar que

$$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}.$$

   Escribir todas las posibles P^{ij} para $n = 2, 3, 4$.

   c) Sean $1 \le i, j \le n$, con $i \ne j$ y $a \in \mathrm{K}$. Se define la matriz $T^{ij}(a) \in \mathrm{K}^{n\times n}$ como

$$T^{ij}(a) = I_n + a.E^{ij}.$$

   Escribir todas las posibles $T^{ij}(a)$ para $n = 2, 3, 4$ $(a \in \mathrm{K})$.

   d) Probar que:

   1) $M_i(a) \in \mathrm{K}^{n\times n}$ es inversible con $(M_i(a))^{-1} = M_i(a^{-1})$
   2) $P^{ij} \in \mathrm{K}^{n\times n}$ es inversible con $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$
   3) $T^{ij} \in \mathrm{K}^{n\times n}$ es inversible con $(T^{ij}(a))^{-1} = T^{ij}(-a)$

   Las matrices $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ se llaman **matrices elementales** de $\mathrm{K}^{n\times n}$.

22. Sea $A \in \mathrm{K}^{n\times m}$, $A = (a_{ij})$, y sea F_i $(1 \le i \le n)$ la i-ésima fila de A, es decir,

   $F_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$ y $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$. Probar que:

   a) $E^{ij} \cdot A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = (0, \dots, 0)$ si $k \ne i$ y $F'_i = F_j$.

   b) $M_i(a) \cdot A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \ne i$ y $F'_i = aF_i$.

c) $P^{ij} \cdot A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i\,,\, j$; $F'_i = F_j$ y $F'_j = F_i$.

d) $T^{ij}(a) \cdot A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_i + aF_j$.

Notar como conclusión que triangular por filas una matriz es multiplicar a izquierda por varias matrices elementales.

¿Cómo se pueden obtener las matrices elementales a partir de la matriz identidad?

¿Qué efecto tiene multiplicar a derecha una matriz A por matrices elementales?

e) Para los sistemas del ejercicio 1, reescribir las operaciones de fila realizadas como producto de matrices elementales.

23. Determinar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas. Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

24. Sea $A \in \mathrm{K}^{n\times n}$ y sea $b \in \mathrm{K}^n$. Probar que $Ax = b$ tiene una única solución si y solo si la matriz escalón reducida correspondiente a A es la matriz identidad. Deducir que $Ax = b$ tiene una única solución si y solo si A es inversible. (En cuyo caso esa única solución es $x = A^{-1}b$.)

25. Si $A \in \mathrm{K}^{n\times n}$ tiene una fila o una columna de ceros, ¿puede ser inversible?

26. Sea $A \in \mathrm{K}^{n\times n}$. Probar que $\exists\, B \in \mathrm{K}^{n\times n} \;/\; B \cdot A = I_n \iff A$ es inversible. Deducir que $\exists\, B \in \mathrm{K}^{n\times n} / \, A \cdot B = I_n \iff A$ es inversible.