ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre — 2017

Práctica 3: Grupos - Tercera Parte

Producto directo y producto semidirecto

- 1.1. Si G y H son grupos, determinar $Z(G \times H)$.
- 1.2. *Producto directo interno.* Sea G un grupo.
- (a) Sean N y M dos subgrupos normales de G y supongamos que $N \cap M = 1$ y $G = NM$. Mostrar que entonces es $G \cong N \times M$.
- (b) Supongamos que G es grupo finito de orden mn con $(m, n) = 1$. Mostrar que si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m , entonces G es isomorfo al producto directo de N y M .
- †(c) Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(N_i)_{i=1}^k$ una familia de subgrupos normales de G tales que $G = \langle \bigcup_{i=1}^k N_i \rangle$ y para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que

$$N_j \cap \left\langle \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq j}} N_i \right\rangle = 1.$$

Mostrar que entonces $G \cong N_1 \times \dots \times N_k$.

- †(d) Otra vez, supongamos que G es finito y sean $N_1, \dots, N_k$ subgrupos normales de G de órdenes $r_1, \dots, r_k$ tales que $(r_i, r_j) = 1$ si $1 \leq i, j \leq k$ y $|G| = r_1 \dots r_k$. Mostrar que $G \cong N_1 \times \dots \times N_k$.

1.3. Probar que:

- (a) $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ si m y n son coprimos (Teorema chino del resto);
- (b) $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_{>0} \times S^1$;
- (c) $D_6 \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2$.

1.4. Sean $f : H \rightarrow H'$ y $g : K \rightarrow K'$ dos morfismos de grupos. Probar que la función $f \times g : H \times K \rightarrow H' \times K'$ definida por $(h, k) \mapsto (f(h), g(k))$ es un morfismo de grupos.

1.5. Sean H y K dos grupos y sean $S \triangleleft H$ y $T \triangleleft K$. Probar que $S \times T \triangleleft H \times K$ y que

$$\frac{H \times K}{S \times T} \cong (H/S) \times (K/T).$$

Sugerencia. Sean $\pi_S : H \rightarrow H/S$ y $\pi_T : K \rightarrow K/T$ las proyecciones. Considerar $\pi_S \times \pi_T$ y usar el 1^{er} teorema de isomorfismo.

1.6. Sean U y V dos grupos. Sean además $f : U \rightarrow W$ y $g : V \rightarrow W$ dos homomorfismos de grupos. Probar que la aplicación $h : (u, v) \in U \times V \mapsto f(u)g(v) \in W$ es un homomorfismo de grupos si todo elemento de $f(U)$ conmuta con todo elemento de $h(V)$.

1.7. *Producto semidirecto.*

- (a) Sean G y N grupos y sea $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(N)$ un homomorfismo de grupos. Sea $K = N \rtimes G$ y consideremos el producto en K dado por

$$(n, g) \cdot (n', g') = (n\theta(g)(n'), gg'), \quad \forall (n, g), (n', g') \in K.$$

Mostrar que, con respecto a este producto, K es un grupo.

Llamamos al grupo K construido el *producto semidirecto (o cruzado) de N por G con respecto a θ* y lo notamos $N \rtimes_{\theta} G$.

- (b) Encontrar homomorfismos ‘naturales’ de grupo $\iota : N \rightarrow N \rtimes_{\theta} G$ y $\pi : N \rtimes_{\theta} G \rightarrow G$ tales que ι sea inyectivo, π sea sobreyectivo e $\text{im } \iota = \ker \pi$.
- (c) Mostrar que si $\theta = 1$ es el homomorfismo trivial, $N \rtimes_{\theta} G \cong N \times G$ es simplemente el producto directo.

1.8. Producto semidirecto interno. Sea K un grupo y sean G y N subgrupos de K con N normal en K . Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) $K = NG$ y $N \cap G = \{1\}$.
- (b) $K = GN$ y $N \cap G = \{1\}$.
- (c) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de N por uno de G .
- (d) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de G por uno de N .
- (e) La composición de la inclusión $\text{incl} : G \hookrightarrow K$ con la proyección canónica $\text{can} : K \twoheadrightarrow K/N$ es un isomorfismo $\tau : G \cong K/N$.
- (f) Existe un homomorfismo $\sigma : K \rightarrow G$ que se restringe a la identidad de G y cuyo núcleo es N .

Además, cuando estas afirmaciones valen, existen un homomorfismo de grupos $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(N)$ y un isomorfismo de grupos $\xi : N \rtimes_{\theta} G \rightarrow K$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{\iota} & N \rtimes_{\theta} G & \xrightarrow{\pi} & G \\
 \downarrow & & \downarrow \xi & & \downarrow \tau \\
 N & \xrightarrow{\text{incl}} & K & \xrightarrow{\text{can}} & K/N
 \end{array}$$

Los homomorfismos ι y π del diagrama fueron construidos en el ejercicio 1.7.

1.9. Mostrar que $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}_2$ para un homomorfismo $\theta : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ apropiado.

1.10. Mostrar que S_n es el producto semidirecto de A_n y $\langle (12) \rangle$.

1.11. Mostrar que $\mathbb{H}$ no puede ser escrito como un producto semidirecto de forma no trivial.

1.12. Probar que $\text{GL}_n(k)$ es un producto semidirecto de $\text{SL}_n(k)$ y $k^{\times}$.

Acciones y teoremas de Sylow

2.1. Si un grupo G actúa sobre un conjunto finito X , el *carácter* de X es la aplicación $\chi_X : G \rightarrow \mathbb{N}_0$ dada por

$$\chi_X(g) = |\{x \in X : gx = x\}|, \quad \forall g \in G.$$

Si no hay ambigüedad sobre X , escribimos simplemente χ .

- (a) Probar que si G actúa transitivamente sobre X , entonces

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = 1.$$

Sugerencia. Considerar el conjunto $S = \{(g, x) \in G \times X : gx = x\}$ y contar sus elementos de dos formas distintas.

(b) Probar que en general, si la acción no es necesariamente transitiva, se tiene

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = |X/G|.$$

Aquí, X/G es el conjunto de órbitas de G en X .

†(c) Probar que si G actúa transitivamente sobre X y $x_0 \in X$, entonces

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)^2 = |X/G_{x_0}|.$$

Aquí, G_{x_0} es el estabilizador de x_0 en G .

Sugerencia. Una forma de hacer esto consiste en contar los elementos del conjunto $S = \{(g, x, y) \in G \times X \times X : gx = x, gy = y\}$ de dos formas distintas.

2.2. Sea G un grupo finito y sean H y K subgrupos de G . Sea $X = HK$.

- (a) Probar que la siguiente fórmula define una acción de $H \times K$ en X : $(h, k) \cdot x = hxk^{-1}$.
- (b) Probar que la acción es transitiva y que el estabilizador del 1 es isomorfo a $H \cap K$.
- (c) Deducir de lo anterior que $|H||K| = |HK||H \cap K|$.

2.3. *Grupos lineales finitos.* Sea k un cuerpo finito de q elementos.

- (a) Sea $V = k^2$ el k -espacio vectorial de vectores columna y sea X el conjunto de vectores no nulos de V . Mostrar que la acción de $\text{GL}_2(k)$ sobre V por multiplicación a izquierda induce una acción transitiva de $\text{GL}_2(k)$ sobre X .
- (b) Sea $v_0 = (1, 0)^t \in X$. Determinar el estabilizador $\text{GL}_2(k)_{v_0}$ de v_0 en $\text{GL}_2(k)$.
- (c) Mostrar que $|\text{GL}_2(k)| = (q^2 - 1)(q^2 - q)$.
- †(d) Más generalmente, mostrar que si $n \in \mathbb{N}$, es

$$|\text{GL}_n(k)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

†(e) Sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que el morfismo $\det : \text{GL}_n(k) \rightarrow k^\times$ es sobreyectivo y concluir que

$$|\text{SL}_n(k)| = \frac{1}{q-1} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

2.4. *Subgrupos grandes.* Sabemos que los subgrupos de índice 2 son normales. El objetivo de este ejercicio es demostrar la siguiente generalización:

Proposición. Sea G un grupo finito, sea p el menor número primo que divide a $|G|$ y sea H un subgrupo de G de índice p . Entonces H es normal.

Notemos que, en las condiciones de este enunciado, G no posee subgrupos de índice menor que p .

- (f) Sea $X = G/H = \{gH : g \in G\}$ el conjunto de coclases a izquierda de H en G ; así, $|X| = p$. Consideramos sobre X la acción usual de G por multiplicación, dada por

$$(g, hH) \in G \times X \mapsto ghH \in X.$$

y sea $\theta : G \rightarrow S(X)$ el homomorfismo de grupos correspondiente. Mostrar que si $K = \ker \theta$, se tiene que $H \supseteq K$ y, como $\text{im } \theta$ es un subgrupo de $S(X)$, que $|G : K|$ divide a $p!$.

- (g) Mostrar que $|G : K| = |G : H|$, para concluir que $H = K$ y, así, que H es normal.

Sugerencia. Para hacerlo, primero observar que $p = |G : H| \leq |G : K|$, de manera que $|G : K| \neq 1$. Si q es un primo que divide a $|G : K|$, lo hecho anteriormente implica que $q \leq p$; esto junto con la elección de p implica que $|G : K| = p^r$ para algún $r \geq 1$. Para terminar, mostrar que debe ser $r = 1$.

Definición. Sea p un número primo. Un elemento g de G es p -primario si su orden es una potencia de p . Un grupo G es un p -grupo si el orden de todo elemento de G es una potencia de p .

2.5. Sea p un número primo. Probar que:

- (a) Si G es un p -grupo y H es un subgrupo de G , entonces H es un p -grupo.
- (b) Si G es un p -grupo y $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo sobreyectivo, H es un p -grupo.
- (c) Si G es un grupo, H un subgrupo normal de G y tanto H como G/H son p -grupos, entonces G es un p -grupo.

2.6. Probar que un grupo finito G es un p -grupo sii $|G| = p^r$ para algún $r \geq 1$.

2.7. Sea p un número primo. Probar que un p -grupo finito tiene centro no trivial.

2.8. Mostrar que no hay grupos simples de orden 28 o 312.

2.9. Mostrar que un grupo de orden 12 o 56 no es simple.

2.10. Sea G un grupo de orden pq , con p y q dos primos distintos. Probar que G no es simple.

2.11. Sea G un grupo de orden $p^r m$ con p primo, $r \geq 1$ y $p > m$. Probar que G no es simple.

2.12. Sea G un grupo de orden $p^2 q$ con p y q primos distintos. Probar que G no es simple.

2.13. Mostrar que un grupo de orden menor que 60 no es simple.

2.14. Probar que todo grupo de orden 5.7.17 es cíclico.

2.15. Mostrar que si G es un grupo y P es un subgrupo de Sylow de G , entonces P es un subgrupo característico de $N(P)$.

2.16. Probar que si todos los subgrupos de Sylow de un grupo finito G son normales, entonces G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow. En particular, esto ocurre cuando G es abeliano.

Presentaciones

3.1. Caracterizar los siguientes grupos dados por generadores y relaciones:

- (a) $\langle x \mid x \rangle$
- (b) $\langle x \mid x^n \rangle$
- (c) $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$
- (d) $\langle x, y \mid x^n, xyx^{-1}y^{-1} \rangle$
- (e) $\langle x, y \mid x^2, y^4, xyxy \rangle$
- (f) $\langle x, y \mid xyxyxyxy \rangle$

3.2. Para cada $1 \leq r \leq 6$, considerar el grupo G_r presentado por $\langle a, b \mid a^7, a^{-1}b^{-1}a^r b \rangle$.

- (a) Probar que el cardinal de G_r es menor o igual a 21.
- (b) Probar que para $r \in \{3, 5, 6\}$ se tiene $G_r \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- (c) Probar que $G_1 \cong \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.
- (d) Probar que para $r \in \{2, 4\}$, G_r es un grupo no abeliano de orden 21. ¿Son isomorfos estos dos grupos?

3.3. Probar que $\langle a, b \mid a^4, abab^{-1}, a^2b^{-2} \rangle$ es una presentación del grupo de los cuaterniones.