

---

# ÁLGEBRA II

## Primer Cuatrimestre — 2017

### Práctica 9: Homología

---

1. Decidir si las siguientes sucesiones de  $A$ -módulos son complejos y, en caso afirmativo, calcular su homología.

(a)  $A = \mathbb{Z}$ ,  $C_i = 0$  para los  $i < 0$ ,  $C_i = \mathbb{Z}_8$  para los  $i \geq 0$ ,  $d_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$  dados por  $d_i(x) = 2x$ .

(b) Igual que el inciso anterior, pero con  $d_i(x) = 4x$ .

(c)  $A = \mathbb{R}$ ,

$$C : \cdots \rightarrow \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \rightarrow \cdots,$$

$d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$  dados por  $d_{2i}(p) = p(0)$  y  $d_{2i+1}(p) = Xp$ .

(d)  $A = \mathbb{Z}$ ,

$$C : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rightarrow \cdots,$$

$d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$  dados por

$$d_{2i}((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (0, a_2, a_3, \dots) \quad \text{y} \quad d_{2i+1}((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (5a_1, 0, 0, \dots).$$

(e)  $A = \mathbb{Z}$ ,

$$C : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\mu_3} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\mu_3} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_4 \rightarrow \cdots$$

con  $\mu_k(x) = kx$ .

(f)  $A = \mathbb{Z}$ ,

$$C : \cdots \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \cdots$$

con  $d_{2i}(x) = nx$ ,  $d_{2i-1}(x) = 0$ .

2. Ver si  $\{f_i : C_i \rightarrow C'_i\}$  es un morfismo de complejos.

(a)  $C = C'$  el primer complejo del ejercicio 1,  $\{f_i\}$  dada por  $f_{2i}(x) = 2x$ ,  $f_{2i+1}(x) = 4x$ .

(b) Los mismos complejos, pero con  $f_{2i}(x) = x$ ,  $f_{2i+1}(x) = 3x$ .

3. Dados dos complejos de  $A$ -módulos  $C = (C_i, d_i)$  y  $C' = (C'_i, d'_i)$ , probar que  $C \oplus C' = (C_i \oplus C'_i, d_i \oplus d'_i)$  es un complejo, y que  $H_*(C \oplus C') = H_*(C) \oplus H_*(C')$ .

4. *Homología de un grafo.* Sea  $\Gamma$  un grafo orientado finito con vértices  $V = \{v_0, \dots, v_m\}$  y aristas  $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ . Dado un anillo  $A$ , se considera el siguiente complejo  $C$ .  $C_0$  es el  $A$ -módulo libre con base  $V$ ,  $C_1$  es el  $A$ -módulo libre con base  $X$ ,  $C_k = 0$  para  $k \neq 0, 1$ ,  $d_1$  definido en la base por  $d_1(a_s) = a_s^f - a_s^i$ , donde  $a_s^i$  y  $a_s^f$  denotan respectivamente el vértice inicial y final de la arista  $a_s$ .

Probar que si  $\Gamma$  es conexo, la homología del complejo  $C$  es 0 salvo  $H_0(C)$  y  $H_1(C)$  que son  $A$ -módulos libres de dimensiones 1 y  $1 - m + n$  respectivamente.

5. Se dice que un complejo de  $A$ -módulos  $C$  se parte si existe una familia de morfismos  $s_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$  tales que  $d = dsd$ .

(a) Sea  $C$  el siguiente complejo de  $\mathbb{Z}_4$ -módulos

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \cdots,$$

donde los morfismos son todos la multiplicación por 2. Probar que el complejo es acíclico pero no se parte.

(b) Probar que todo complejo acíclico de  $A$ -módulos libres acotado inferiormente se parte.

(c) Probar que todo complejo acíclico de  $\mathbb{Z}$ -módulos libres de tipo finito se parte.

(Un complejo  $C$  se dice *acotado inferiormente* si  $\exists n_0 : C_n = 0 \forall n \leq n_0$ .)

6. Un complejo se dice *contráctil* si el morfismo identidad es homotópico al morfismo nulo. Probar que un complejo  $C$  es contráctil sii es acíclico y se parte.

7. Dado un morfismo de complejos  $f : C \rightarrow C'$ , se define el *cono* de  $f$  de la siguiente manera.  $M_n = C_{n-1} \oplus C'_n$ ,  $\delta_n : C_{n-1} \oplus C'_n \rightarrow C_{n-2} \oplus C'_{n-1}$ ,  $\delta_n(c, c') = (-d_{n-1}(c), d'_n(c') - f_{n-1}(c))$ .

Probar lo siguiente.

(a)  $M(f) = (M_n, \delta_n)$  es un complejo para todo morfismo  $f$ .

(b)  $M(1)$  es acíclico y se parte, donde 1 es la identidad de un complejo  $C$ . Sugerencia: tomar  $s_n(c, c') = (-c', 0)$ .

8. Sea  $f : C \rightarrow C'$  un morfismo de complejos. Probar que  $f \simeq 0$  sii  $f$  se extiende a un morfismo  $(-s, f) : M(1_C) \rightarrow C'$ , donde  $1_C$  es la identidad del complejo  $C$ .

9. Dado un morfismo de complejos  $f : C \rightarrow C'$ , se define el *cilindro* de  $f$  de la siguiente manera.  $T_n = C_n \oplus C_{n-1} \oplus C'_n$ ,

$$\delta : C_n \oplus C_{n-1} \oplus C'_n \rightarrow C_{n-1} \oplus C_{n-2} \oplus C'_{n-1}, \quad \delta_n(x, y, z) = (d(x) + y, -d(y), d'_n(z) - f(y)).$$

Probar lo siguiente.

(a)  $T(f) = (T_n, \delta_n)$  es un complejo para todo morfismo  $f$ .

(b) Dados dos morfismos  $f, g : C \rightarrow C'$ ,  $f \simeq g$  sii se extienden a un morfismo  $(f, s, g) : T(1) \rightarrow C'$ , donde 1 es la identidad de  $C$ .