Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2017

Práctica 8: Módulos finitamente generados sobre un DIP

1. Clasificar a menos de isomorfismo los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.

2. Sean A un dominio de ideales principales y M un A-módulo finitamente generado. Mostrar que:

(a) M es de torsión sii $\hom_A(M,A) = 0$; y

(b) M es indescomponible sii o bien $M \cong A$ o bien existen $p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tales que $M \cong A/\langle p^n \rangle$.

3. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Encontrar todos los grupos abelianos de orden p^2, p^3, p^4 y p^5.

4. Sean G un grupo abeliano finito y $p \in \mathbb{N}$ un número primo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p de G es coprimo con p.

5. (a) Hallar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos:

(i) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$;

(ii) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$;

(iii) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$;

(iv) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

(b) Hallar los factores invariantes de un grupo abeliano G de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

(c) Hallar los factores invariantes de un grupo abeliano G de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

6. Determinar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos dados por generadores y relaciones:

(a) $G = \langle a, b, c \rangle$; $2a + 3b = 0$, $2a + 4c = 0$.

(b) $G = \langle a, b, c \rangle$; $a = 3b$, $a = 3c$.

(c) $G = \langle a, b, c \rangle$; $3a = -c$, $3a = 3c - 8b$.

(d) $G = \langle a, b, c \rangle$; $3a = b$, $b = 3c$.

7. Hallar los factores invariantes de los siguientes cocientes:

(a) $\mathbb{Z}^4/S$, con $S = \{x \in \mathbb{Z}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$.

(b) $\mathbb{Z}^3/S$, con $S = \{x \in \mathbb{Z}^3 : x_1$ es par, $x_1 + 5x_2 - x_3 = 0\}$.

(c) $\mathbb{Z}^3/S$, con $S = \{x \in \mathbb{Z}^3 : x_1 = x_2 + x_3$ es par, $3 \mid x_3\}$.

8. Sean p, q, r primos distintos. Determinar la cantidad de grupos no isomorfos de orden n en cada caso:

(a) $n = p^6 q^3 r$.

(b) $n = p^2 q^4 r^5$.

(c) $n = p^3 q^4$.

9. Sea $G \subseteq \mathbb{Z}^n$ un subgrupo.

(a) Probar que $[\mathbb{Z}^n : G]$ es finito sii G tiene rango n.

(b) Si G tiene rango n y $\{g_1, \ldots, d_n\}$ es una base de G, sea $M \in \mathsf{M}_n(\mathbb{Z})$ la matriz que tiene a los g_i como columnas. Mostrar que $[\mathbb{Z}^n : G] = |\det M|$.

10. Probar que dos matrices de 3×3 con coeficientes en un cuerpo k son semejantes sii tienen el mismo polinomio característico y el mismo polinomio minimal. Mostrar con un ejemplo que no vale la afirmación análoga para matrices de 4×4.

11. Hallar la forma racional de $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$.

12. Sean $A = \mathbb{R}[x]/\langle (x^2+1)^2 \rangle$ y $J = \langle x^2+1 \rangle \leq A$. Probar que todo A–módulo finitamente generado es isomorfo a $A^m \oplus (A/J)^n$ para un único par de enteros no negativos (m,n).