Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2017

Práctica 7: Módulos - Segunda Parte

Condiciones de cadena

1.1. *Anillos de matrices.* Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que un anillo A es noetheriano a izquierda sii $M_n(A)$ es noetheriano a izquierda.

1.2. Probar que un dominio íntegro artiniano es un cuerpo.

1.3. Probar que:

(a) Un grupo abeliano artiniano es de torsión.

(b) Un grupo abeliano es artiniano y noetheriano sii es finito.

1.4. *Extensiones finitas de anillos.* Sea B un subanillo de un anillo A tal que A es finitamente generado como B-módulo a izquierda. Probar que si B es noetheriano a izquierda, entonces A es noetheriano a izquierda.

1.5. *Álgebras de matrices formales.* Sean A y B anillos y sea M un A-B-bimódulo. Sea T el grupo abeliano $A \oplus M \oplus B$. Dados $a \in A, m \in M$ y $b \in B$, notamos por $\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ al elemento $(a, m, b) \in T$.

(a) Probar que la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & m' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & am' + mb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix}$$

define un producto asociativo en T. Concluir que $(T, +, \cdot)$ es un anillo, el cual también notamos por $\left(\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Probar que T es noetheriano a izquierda, resp. a derecha, si y solo si A y B son noetherianos a izquierda, resp. a derecha, y M es finitamente generado como A-módulo a izquierda, resp. B-módulo a derecha.

(c) Probar que $T = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right)$ no es isomorfo a su anillo opuesto.

Módulos libres, proyectivos e inyectivos

2.1. Sean A un anillo y G un grupo. Probar que $A[X]$ y $A[G]$ son A-módulos libres.

2.2. Sea A un anillo conmutativo.

(a) Probar que cualquier subconjunto $\{a_1, a_2\} \subseteq A$ es linealmente dependiente. Concluir que si un ideal no nulo $I \subseteq A$ es un A-módulo libre, entonces $I \cong A$ como A-módulo —de donde sigue que I es un ideal principal.

(b) Sea $A = \mathbb{Z}[X]$. Probar que $I = \langle 2, X \rangle$ no es un A-módulo libre.

2.3. Sea A un dominio íntegro y sean $v_1, \ldots, v_n \in A^n$. Sea $M \in M_n(A)$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \ldots, v_n$. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) El conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente si y solo si $\det M \neq 0$.

(b) El conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores si y solo si $\det M$ es una unidad.

2.4. *Un producto arbitrario de módulos libres puede no ser libre.* Sea $M = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$; los elementos de M son sucesiones de números enteros indexadas por $\mathbb{N}$. El objetivo de este ejercicio es probar que M no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. Sea N el submódulo de M formado por las sucesiones de soporte finito —es decir, aquellas que tienen finitos coeficientes no nulos. Supongamos que M es un $\mathbb{Z}$-módulo libre con base B.

(a) Probar que N es numerable.

(b) Probar que existe un subconjunto $B_1 \subseteq B$ tal que N está contenido en el submódulo N_1 generado por B_1. Probar que N_1 también es numerable.

(c) Sea $\overline{M} = M/N_1$. Probar que $\overline{M}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. Deducir que si $\overline{x} \in \overline{M}$ es no nulo, entonces existen finitos enteros k tales que $\overline{x} = k\overline{y}$ para algún $\overline{y} \in \overline{M}$ ($\overline{y}$ depende de k).

(d) Sea $S = \{(b_1, b_2, b_3, \dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \mid b_i = \pm i! \text{ para todo } i\}$. Probar que S es no numerable y deducir que existe $s \in S$ con $s \notin N_1$.

(e) Mostrar que la suposición de que M es libre lleva a una contradicción: Por (d) podemos elegir $s \in S$ con $s \notin N_1$. Probar que para cada entero k existe algún $y \in M$ tal que $\bar{s} = k\overline{y}$, contradiciendo (c).

2.5. Sean A un anillo, $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado y M un A-módulo. Probar que:

(a) Si M es libre, entonces M_S es libre como A_S-módulo.

(b) Si M es proyectivo, entonces M_S es proyectivo como A_S-módulo.

(c) Si M es finitamente generado, entonces M_S es finitamente generado como A_S-módulo.

2.6. *Bases duales.* Sean A un anillo y P un A-módulo a izquierda. Una *base dual* para P es una familia $\{(x_i, f_i)\}_{i\in I}$ donde $(x_i, f_i) \in P \times P^*$ para cada $i \in I$, que cumple las siguientes condiciones:

(i) para todo $x \in P$ el conjunto $\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}$ es finito, y

(ii) para todo $x \in P$ vale la igualdad $x = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i$.

Notar que (i) implica que la suma en (ii) tiene sentido.

(a) Mostrar que un A-módulo P es proyectivo si y solo si posee una base dual.

(b) Mostrar que un A módulo P es proyectivo y finitamente generado si y solo si posee una base dual finita.

2.7. Para cada A-módulo a izquierda M, sea $M^* = \mathrm{hom}_A(M, A)$ con la estructura de A-módulo a derecha inducida por la estructura de A-módulo a derecha de A. Mostrar que si M es proyectivo y finitamente generado entonces M^* también lo es.

2.8. *Resoluciones proyectivas.* Sea A un anillo. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Para cada A-módulo M existe un diagrama

$$\cdots \longrightarrow P_{p+1} \xrightarrow{d^p} P_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d^0} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

de A-módulos y morfismos de A-módulos que es exacto, y en el que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ el módulo P_p es proyectivo. El morfismo ϵ se llama *aumentación*, y el diagrama obtenido al reemplzar ϵ por 0 es llamado una *resolución proyectiva* de M.

(b) Los A-módulos P_p pueden elegirse libres para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

(c) Si A es noetheriano a izquierda y M es finitamente generado, entonces los A-módulos P_p pueden elegirse finitamente generados para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

(d) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos y

$$\cdots \longrightarrow P_p \longrightarrow P_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

y

$$\cdots \longrightarrow Q_p \longrightarrow Q_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow 0$$

son resoluciones proyectivas de M y N, respectivamente, entonces existen morfismos $f_p : P_p \to Q_p$ para cada $p \geq 0$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_p \arrow[r] \arrow[d, "f_p"] & P_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_p \arrow[r] & Q_{p-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(e) Encontrar resoluciones proyectivas para
- (i) un A-módulo proyectivo;
- (ii) el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$;
- (iii) el $k[X]$-módulo $S = k[X]/\langle X \rangle$.

2.9. Sea A un grupo abeliano finito.

(a) Probar que A no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo.

(b) Probar que A no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

2.10. Probar que $\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, pero $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sí lo son.

2.11. Sea A un dominio de integridad y sea K su cuerpo de fracciones.

(a) Probar que K es un A-módulo inyectivo.

(b) Probar que todo K-módulo es un A-módulo inyectivo.

2.12. Probar que si A es un anillo de división entonces todo A-módulo es inyectivo y proyectivo.

Productos tensoriales

3.1. Probar que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

3.2. Sean A un anillo y M_A y ${}_AM$ A-módulos. Mostrar que $M \otimes_A N$ es un $\mathsf{End}_A(M)$-$\mathsf{End}_A(N)$-bimódulo.

3.3. Sean A y B anillos y M_A, ${}_AN_B$ y ${}_BP$ módulos. Mostrar que hay un isomorfismo natural

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P.$$

3.4. Sean A un anillo conmutativo, $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal y M un A-módulo. Muestre que hay un isomorfismo natural $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.

3.5. Sean A un anillo, M_A y ${}_AN$ módulos y supongamos que $M = \sum_{i \in I} M_i$ es suma de una familia de submódulos $\{M_i\}_{i \in I}$. Probar que si $M_i \otimes_A N = 0$ para todo $i \in I$, entonces $M \otimes_A N = 0$.

3.6. Sean A un anillo y M un A-módulo playo. Probar que si $N \subseteq M$ es un sumando directo, entonces N es playo.

3.7. Probar que si A es un anillo conmutativo y M, N son A-módulos playos, entonces $M \otimes_A N$ es un A-módulo playo.

3.8. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Probar que:

(a) Si M es un A-módulo izquierdo, entonces hay un isomorfismo $A_S \otimes_A M \cong M_S$.

(b) El A-módulo derecho A_S es playo.

3.9. Sea A un anillo. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Todo A-módulo a izquierda es playo.

(ii) Todo A-módulo a derecha es playo.

(iii) Para todo $a \in A$, existe $x \in A$ tal que $a = axa$.

(iv) Todo ideal izquierdo principal está generado por un idempotente.
(v) Todo ideal derecho principal está generado por un idempotente.

3.10. *Criterio local de platitud.* Sea A un anillo conmutativo y M un A-módulo. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) M es playo;
(ii) para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $M_{\mathfrak{p}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo playo;
(iii) para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, $M_{\mathfrak{m}}$ es un $A_{\mathfrak{m}}$-módulo playo.

3.11. *Producto tensorial de álgebras.* Sea k un cuerpo y sean A y B k-álgebras. Mostrar que $A \otimes_k B$ es un álgebra de forma tal que el producto está dado por

$$a \otimes b \cdot a' \otimes b = (aa') \otimes (bb').$$

3.12. Sean k un cuerpo, A una k-álgebra y n, $m \in \mathbb{N}$. Mostrar que hay isomorfismos naturales de álgebras

$$A[X] \cong k[X] \otimes_k A,$$
$$\mathsf{M}_n(A) \cong \mathsf{M}_n(k) \otimes_k A,$$

y

$$\mathsf{M}_{nm}(A) \cong \mathsf{M}_n(A) \otimes_k \mathsf{M}_m(A).$$