Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2017

Práctica 6: Módulos

Módulos y morfismos

1.1. Sean A un anillo, $n \geq 1$ y $M \in A^{m \times n}$. Mostrar que la multiplicación matricial da un morfismo de A-módulos (a derecha):

$$f : x \in A^n \mapsto Mx \in A^m$$

1.2. Sean N y M dos $\mathbb{Q}$-módulos. Mostrar que una función $f : N \to M$ es un morfismo de $\mathbb{Q}$-módulos sii es un morfismo de grupos abelianos.

1.3. Sean A un anillo y N, M dos A-módulos.

(a) Mostrar que $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ es un grupo abeliano con suma dada por

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m), \qquad \forall f,\, g \in \operatorname{Hom}_A(M,N),\ \forall m \in M.$$

(b) Sea $\mathsf{Z}(A)$ el centro de A. Definimos una operación

$$\mathsf{Z}(A) \times \operatorname{Hom}_A(M,N) \to \operatorname{Hom}_A(M,N)$$

poniendo

$$(a \cdot f)(m) = f(am), \qquad \forall f \in \operatorname{Hom}_A(M,N),\ \forall a \in \mathsf{Z}(A),\ \forall m \in M.$$

Mostrar que esto hace de $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ un $\mathsf{Z}(A)$-módulo.

(c) Mostrar que para todo A-módulo M hay un isomorfismo de $\mathsf{Z}(A)$-módulos $\operatorname{Hom}_A(A,M) \to M$ dado por la evaluación en 1.

1.4. (a) Sean A, B y C anillos y sean M un (B,A)-bimódulo y N un (C,A)-bimódulo. Mostrar que el grupo abeliano $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ posee una única estructura de (C,B)-bimódulo tal que

$$(c \cdot f \cdot b)(m) = cf(bm), \qquad \forall b \in B,\ \forall c \in C,\ \forall m \in M.$$

(b) Sean A un anillo y M un A-módulo a izquierda. Considerando a A como (A,A)-bimódulo, mostrar que hay un isomorfismo de A-módulos a izquierda $\operatorname{Hom}_A(A,M) \cong M$.

1.5. *Cambios de anillo.* Sea $\phi : A \to B$ un morfismo de anillos.

(a) Mostrar que si definimos un porducto $A \times B \to B$ poniendo

$$a \cdot b = \phi(a)b$$

dotamos a B de una estructura de A-módulo a izquierda. De forma similar podemos obtener una estructura de A-módulo a derecha y de A-bimódulo sobre B.

(b) Sea M un B-módulo a izquierda. Mostrar que el producto $A \times M \to M$ dado por $a \cdot m = \phi(a)m$ hace de M un A-módulo a izquierda. Lo notamos $\phi^*(M)$.

(c) Si $f : M \to N$ es un morfismo de B-módulos a izquierda, entonces $f : \phi^*(M) \to \phi^*(N)$ es un morfismo de A-módulos a izquieda. Lo notamos $\phi^*(f)$.

(*d*) Si M y N son B-módulos a izquierda, la aplicación

$$\phi^* : f \in \mathrm{Hom}_B(M,N) \mapsto \phi^*(f) \in \mathrm{Hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

(*e*) Si M, N y P son B-módulos a izquierda y $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son morfismos de B-módulos, entonces

$$\phi^*(g \circ f) = \phi^*(g) \circ \phi^*(f).$$

En particular, la aplicación $\phi^* : \mathsf{End}_B(M) \to \mathsf{End}_A(\phi^*(M))$ es un morfismo de anillos.

1.6. Sean A un anillo, M un A-módulo a derecha y $B = \mathsf{End}_A(M)$ el anillo de endomorfismos de M. Mostrar que M es un B-módulo a izquierda de manera natural y que con esa estructura resulta de hecho un (B,A)-bimódulo.

1.7. Sea A un anillo.

(*a*) Sea $f : M \to M'$ un morfismo de A-módulos a izquierda. Para cada A-módulo a izquierda P definimos aplicaciones

$$f_P^* : h \in \mathrm{Hom}_A(M', P) \mapsto h \circ f \in \mathrm{Hom}_A(M, P)$$

y

$$f_*^P : h \in \mathrm{Hom}_A(P, M) \mapsto f \circ h \in \mathrm{Hom}_A(P, M').$$

Mostrar que f_P^* y f_*^P son morfismos de grupos abelianos.

(*b*) Sean $f : M \to M'$ y $g : M' \to M''$ morfismos de A-módulos. Entonces para cada A-módulo a izquierda P vale que

$$f_P^* \circ g_P^* = (g \circ f)_P^*$$

y

$$g_*^P \circ f_*^P = (g \circ f)_*^P.$$

(*c*) Una sucesión de A-módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

es exacta sii la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \mathrm{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \mathrm{Hom}_A(N, M'')$$

es exacta para todo A-módulo a izquierda N. ¿Hay un enunciado similar que involucre a los morfismos f_N^* y g_N^*?

(*d*) ¿Es cierto que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos a izquierda entonces

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \mathrm{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \mathrm{Hom}_A(N, M'') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos?

1.8. Probar que un A-módulo M es simple sii para todo $m \in M \setminus 0$, $Am = M$.

1.9. (*a*) *Lema de Schur.* Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar que:

1. Si M es simple, entonces f es o bien nula o bien inyectva.
2. Si N es simple, entonces f es o bien nula o bien sobreyectiva.
3. Si M y M son simples, entonces f es o bien nula o bien un isomorfismo.

(*b*) Probar que si M es un A-módulo simple, entonces $\mathsf{End}_A(M)$ es un anillo de división.

1.10. Sean k un cuerpo, V un k-espacio vectorial y $f \in \mathsf{End}_k(V)$. Mostrar que existe una única estructura de $k[X]$-módulo a izquierda sobre V para la cual $k \subseteq k[X]$ actúa por multiplicación escalar y

$$X \cdot v = f(v), \qquad \forall v \in V.$$

1.11. Sean A un anillo y M un A-módulo a izquierda.

(*a*) Probar que el conjunto $\operatorname{ann} M = \{a \in A : am = 0,\ \forall m \in M\}$ es un ideal a izquierda de A. Si $\operatorname{ann} M = 0$, decimos que M es un A-módulo *fiel*.

(*b*) Dar ejemplos de módulos fieles.

1.12. Probar que $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.

1.13. (*a*) Probar que todo módulo de tipo finito posee un conjunto generador minimal.

(*b*) Mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto generador minimal de $\mathbb{Z}$ de cardinal n.

1.14. Probar que un A-módulo es finitamente generado si es isomorfo a un cociente de A^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

1.15. Probar que si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos a izquierda y M' y M'' son finitamente generados, entonces M es finitamente generado.

1.16. Sean A un anillo, M un A-módulo a izquierda finitamente generado y sea $f : M \to A^n$ un morfismo sobreyectivo de A-módulos. Probar que $\ker f$ es finitamente generado.

1.17. Probar que un k-espacio vectorial V es noetheriano sii $\dim_k V < \infty$.

1.18. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\sqrt{d} \in \mathbb{C}$ una raíz cuadrada de d. Probar que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es noetheriano.

1.19. Sean k un cuerpo, V un k-espacio vectorial de dimensión infinita y $A = \mathsf{End}_k(V)$ el anillo de endomorfismos de V. Probar que existe un A-módulo M no nulo tal que $M \cong M \oplus M$.

1.20. (*a*) Sea

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos a izquierda en el que las filas son exactas. Probar que existe un único morfismo $f'' : M'' \to N''$ que completa el diagrama preservando la conmutatividad.

(*b*) Probar que si f' y f son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

1.21. *Lema de los cinco.* Consideremos un diagrama conmutativo de A-módulos izquierdos

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

y supongamos que las dos filas son exactas.

(a) Si α_1, α_2, α_4 y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 es un isomorfismo.

(b) Si α_1 es sobreyectivo y α_2 y α_4 son inyectivos, entonces α_3 es inyectivo.

(c) Si α_5 es inyectivo y α_2 y α_4 son sobreyectivos, entonces α_3 es sobreyectivo.

Localización de módulos

2.22. Sean A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Probar que si $f : M \to N$ es un morfismo de A-modulos, entonces existe un único morfismo de A_S-módulos $f_S : M_S \to N_S$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_M"'] & N \arrow[d, "j_N"] \\ M_S \arrow[r, "f_S"] & N_S \end{tikzcd}$$

2.23. Sean A un anillo conmutativo, $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado y M un A-módulo a izquierda finitamente generado. Probar que $M_S = 0$ sii existe $s \in S$ tal que $sM = 0$.

Dar un contraejemplo para esta equivalencia cuando M no es finitamente generado.

2.24. *Exactitud de la localización.*

(a) Sean A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos, entonces

$$0 \longrightarrow M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A_S-módulos.

(b) En particular, si $M' \subseteq M$ es un submódulo de un A-módulo M, entonces M'_S puede ser considerado un submódulo de M_S.

2.25. Sean A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Probar que si M es un A-módulo libre entonces M_S es un A_S-módulo libre.

2.26. Sean A un anillo conmutativo, $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado y M un A-módulo.

(a) Si P y Q son submódulos de M, entonces $(P+Q)_S = P_S + Q_S$.

(b) Si P y Q son submódulos de M, entonces $(P \cap Q)_S = P_S \cap Q_S$.

(c) Si $P \subseteq M$ es un submódulo, entonces hay un isomorfismo canónico $(M/P)_S \cong M_S/P_S$.

2.27. *Propiedades locales.* Sea A un anillo conmutativo.

(a) Sea M un A-módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $M = 0$;
(ii) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; y
(iii) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(b) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(i) f es inyectivo;
(ii) $f_{\mathfrak{p}}$ es inyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; y
(iii) $f_{\mathfrak{m}}$ es inyectivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(c) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(i) f es sobreyectivo;
(ii) $f_{\mathfrak{p}}$ es sobreyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; y
(iii) $f_{\mathfrak{m}}$ es sobreyectivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(d) Consideremos una sucesión de A-módulos y morfismos de A-módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{1}$$

tales que $gf = 0$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(i) La sucesión (1) es exacta.
(ii) Para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} M''_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en $\mathfrak{p}$, es exacta.
(iii) Para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{m}}} M''_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en $\mathfrak{m}$, es exacta.