Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2017

Práctica 5: Anillos conmutativos

En esta práctica todos los anillos son conmutativos.

Ideales y factorización

1.1. Sean I y J ideales de un anillo A.

(a) Probar que $IJ = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n : a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{N}\}$ es un ideal.

(b) Probar que $IJ \subseteq I \cap J$.

(c) Probar que si $I + J = A$, entonces $IJ = I \cap J$.

1.2. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Expresar a los siguientes ideales de $\mathbb{Z}$ como ideales principales:

$$\langle m, n\rangle, \langle m\rangle + \langle n\rangle, \langle m\rangle \cap \langle n\rangle, \langle m\rangle\langle n\rangle.$$

1.3. (a) Sea I un ideal de un anillo A. Probar que

$$\sqrt{I} = \{a \in A : \text{existe } r \in \mathbb{N} \text{ tal que } a^r \in I\}$$

es un ideal de A. El ideal $\sqrt{I}$ se llama *radical* de I.

(b) Sea $m \in \mathbb{Z}$. Expresar a $\sqrt{\langle m\rangle}$ como ideal principal.

1.4. Probar que si A es un DIP, entonces todo ideal primo no nulo de A es maximal.

Denotamos por $\operatorname{Spec} A$ al conjunto de todos los ideales primos de un anillo A.

1.5. Sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales de un anillo A y sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ tal que $\cap_{i=1}^n I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

(a) Probar que existe $1 \leq i \leq n$ tal que $I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

(b) Probar que si $\mathfrak{p} = \cap_{i=1}^n I_i$, entonces $\mathfrak{p} = I_i$ para algún $1 \leq i \leq n$.

1.6. Sea A un anillo. Probar que:

(a) Un ideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ es primo sii $A/\mathfrak{p}$ es un dominio íntegro.

(b) Un ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ es maximal sii $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo.

(c) Un ideal maximal de A es primo.

1.7. Probar que $\mathfrak{m} = \langle 3, Y^4 - X, Y^{12} - X^3 + Y - 1\rangle$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z}[X, Y]$.

Sugerencia. Estudiar el cociente $\mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{m}$: para empezar, observar que $\mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{m} \cong (\mathbb{Z}[X,Y]/\langle 3\rangle)/(\mathfrak{m}/\langle 3\rangle)$...

1.8. Hallar $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. ¿Qué ideales primos de $\mathbb{Z}$ son maximales?

1.9. Sea k un cuerpo. Probar que si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} k[X]$, entonces existe $f \in \mathfrak{p}$ mónico e irreducible tal que $\mathfrak{p} = \langle f\rangle$. Recíprocamente, todo ideal principal generado por un polinómio mónico e irreducible es un ideal primo de $k[X]$.

1.10. Sea A un anillo. Probar que:

(a) Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ y $B \subseteq A$ es un subanillo, entonces $B \cap \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$.

(b) Si $I \subseteq A$ es un ideal, $f : A \to A/I$ es la proyección canónica y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A/I$, entonces $f^{-1}(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Spec} A$.

(c) Si $I \subseteq A$ es un ideal y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ es tal que $\mathfrak{p} \supseteq I$, entonces $\mathfrak{p}/I \in \operatorname{Spec} A/I$.

1.11. Probar que si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$ entonces existe un número primo $p \in \mathbb{N}$ tal que o bien $\mathfrak{p} = \langle p \rangle$ o bien existe un polinomio $f \in \mathbb{Z}[X]$ mónico e irreducible sobre $\mathbb{Z}_p$ tal que $\mathfrak{p} = \langle p, f \rangle$.

Sugerencia. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$. Mostrar que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ es un ideal principal de $\mathbb{Z}$ generado por un número primo p, así que en particular $\langle p \rangle \subseteq \mathfrak{p}$. Considerar ahora el ideal $\mathfrak{p}/\langle p \rangle$ de $\mathbb{Z}[X]/(p) \cong \mathbb{Z}_p[X]$ y usar un ejercicio anterior que describe los ideales primos de este anillo.

1.12. *Nilradical.* Sea A un anillo. Un elemento $a \in A$ es *nilpotente* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. El *nilradical de A* es el conjunto $\operatorname{nil}(A) = \sqrt{0} = \{a \in A : a \text{ es nilpotente}\}$. Probar que:

(a) $\operatorname{nil}(A)$ es un ideal de A.

(b) $\operatorname{nil}(A/\operatorname{nil}(A)) = 0$.

(c) $\operatorname{nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}$.

(d) Si $x \in \operatorname{nil}(A)$, entonces $1 + x$ es inversible.

1.13. *Radical de Jacobson.* Sea A un anillo. El *radical de Jacobson de A* es la intersección $J(A)$ de todos los ideales maximales de A. Probar que $x \in J(A)$ sii para cada $y \in A$ se tiene que $1 - xy \in \mathscr{U}(A)$.

1.14. (a) Probar que el ideal $\langle 2, X \rangle \subseteq \mathbb{Z}[X]$ no es principal.

(b) Probar que el ideal $\langle 2, 1 + \sqrt{-5} \rangle \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no es principal.

1.15. Sea $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Probar que 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$ y $1 - \sqrt{-5}$ son irreducibles en A, no asociados entre sí. Notar que $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$ y concluir que A no es un DFU.

Localización

2.1. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $S \subseteq \mathscr{U}(A)$, entonces $A_S \cong A$.

(b) Si $0 \in S$, entonces $A_S \cong 0$.

2.2. Sea $S = \{m \in \mathbb{Z} : m \neq 0\}$. Probar que $S \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es multiplicativamente cerrado y que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])_S \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

2.3. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Notar que podemos pensar a S como un subconjunto multiplicativamente cerrado de $A[X]$ y probar que $(A[X])_S \cong A_S[X]$.

2.4. Sean A un anillo, $f \in A$ y $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. Probar que $S \subseteq A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado y que $A_S \cong A[X]/\langle Xf - 1 \rangle$. En general, escribimos A_f en lugar de A_S.

2.5. Sean A un DFU y $f \in A$, $f \neq 0$. Probar que A_f es un DFU. ¿Quiénes son los irreducibles de A_f?

2.6. Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Probar que $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado. En general, escribimos $A_{\mathfrak{p}}$ en lugar de $A_{A \setminus \mathfrak{p}}$.

2.7. Sean A un anillo, $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado e $I \subseteq A$ un ideal. Sea $\bar{S}$ la imagen de S por la aplicación canónica $A \to A/I$. Probar que $(A/I)_{\bar{S}} \cong A_S/IA_S$.

2.8. Sean A un anillo y $S, T \subseteq A$ subconjuntos multiplicativamente cerrados. Sea $\bar{T}$ la imagen de T por la aplicación canónica $A \to A_S$ y sea $U = ST = \{st : s \in S, t \in T\}$. Probar que $U \subseteq A$ es multiplicativamente cerrado y que $(A_S)_{\bar{T}} \cong A_U$.

2.9. (a) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $A = C(U)$ el anillo de las funciones continuas $U \to \mathbb{R}$. Sea $x_0 \in U$ y pongamos $S = \{f \in A : f(x_0) \neq 0\}$. Probar que S es multiplicativamente cerrado. ¿Es inyectiva la aplicación canónica $A \to A_S$? De no serlo, describir su núcleo.

(*b*) Supongamos que A es un dominio íntegro y sea $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Probar que la aplicación canónica $A \to A_S$ es inyectiva.

(*c*) Sean A un anillo y $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Dar condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación canónica $A \to A_S$ sea inyectiva.

2.10. Sean $A = \mathsf{C}(\mathbb{R})$, $U = (0,1)$ y $S = \{f \in A : \forall t \in U,\ f(t) \neq 0\}$.

(*a*) Probar que $S \subseteq A$ es multiplicativamente cerrado.

(*b*) Sea $r : \mathsf{C}(\mathbb{R}) \to \mathsf{C}(U)$ la restricción de funciones. Probar que existe $\bar{r} : \mathsf{C}(\mathbb{R})_S \to \mathsf{C}(U)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}(\mathbb{R}) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\text{can}"'] & \mathsf{C}(U) \\ \mathsf{C}(\mathbb{R})_S \arrow[ur, dotted, "\bar{r}"'] & \end{tikzcd}$$

(*c*) Probar que $\bar{r}$ es inyectiva.

†(*d*) Probar que $\bar{r}$ es sobreyectiva.