

Álgebra I

Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

Conjuntos

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

- i) $1 \in A$ ii) $\{1\} \subseteq A$ iii) $\{2, 1\} \subseteq A$ iv) $\{1, 3\} \in A$ v) $\{2\} \in A$

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- i) $3 \in A$ iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$ vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$ x) $\emptyset \subseteq A$
 ii) $\{3\} \subseteq A$ v) $\{1, 2\} \in A$ viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$ xi) $A \in A$
 iii) $\{3\} \in A$ vi) $\{1, 2\} \subseteq A$ ix) $\emptyset \in A$ xii) $A \subseteq A$

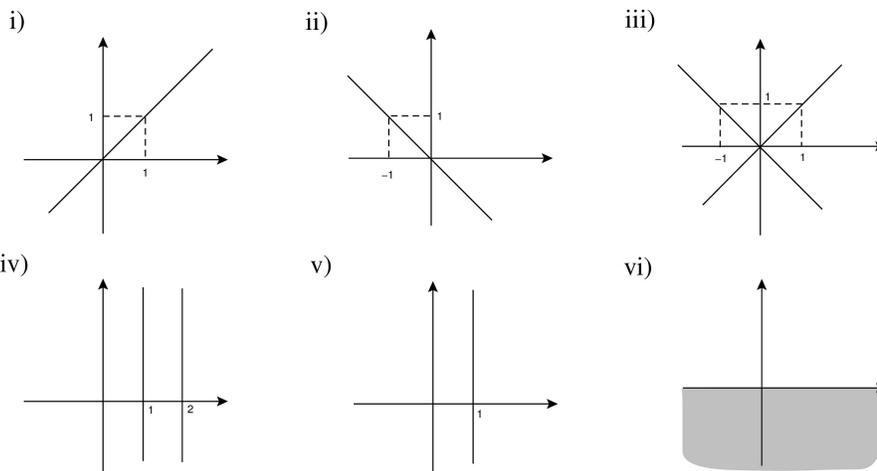
3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos

- i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$
 ii) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$
 iii) $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < |x| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 3\}$
 iv) $A = \{\emptyset\}$, $B = \emptyset$

4. i) Describir a los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} por comprensión mediante *una sola* ecuación:

$$\{-3, 1, 5\} \quad , \quad (-\infty, 2] \cup [7, +\infty)$$

ii) Describir a los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 por comprensión mediante *una sola* ecuación:



5. Dados los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ del conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$, hallar

- i) $A \cap (B \triangle C)$ ii) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ iii) $A^c \cap B^c \cap C^c$

6. Dados subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V , describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.

7. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

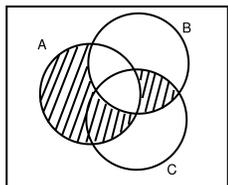
i) $(A \cup B^c) \cap C$

ii) $A \Delta (B \cup C)$

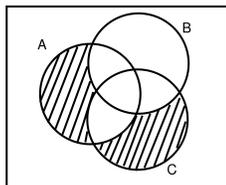
iii) $A \cup (B \Delta C)$

8. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

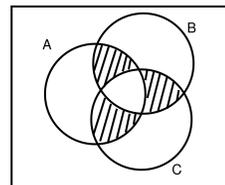
i)



ii)



iii)



9. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos

i) $A = \{1\}$

ii) $A = \{a, b\}$

iii) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$

10. Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

11. Sean p, q proposiciones Verdaderas o Falsas. Comparar las tablas de verdad de

$$p \Rightarrow q, \quad \sim q \Rightarrow \sim p, \quad \sim p \vee q, \quad \sim (p \wedge \sim q)$$

(Cuando para probar $p \Rightarrow q$ se prueba en su lugar $\sim q \Rightarrow \sim p$ se dice que es una demostración por contrarrecíproco, mientras que cuando se prueba en su lugar que $p \wedge \sim q$ es falso (lleva a una contradicción), se dice que es una demostración por el absurdo).

12. Decidir si son verdaderas o falsas

i) (a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$

(d) $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \wedge n \leq 8$

(b) $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 5$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \vee n \leq 8$

(f) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m > n$

ii) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

iii) En cada uno de los casos siguientes, decidir si las dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Dar un contraejemplo cuando no es el caso.

(a) $\exists x, \forall y, p(x, y)$ y $\forall y, \exists x, p(x, y)$

(b) $\forall x, p(x)$ y $\nexists x, \sim p(x)$

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \Delta B) - C = (A - C) \Delta (B - C)$

iii) $C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \Delta B)^c$

ii) $A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$

iv) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

14. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V . Probar que

i) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

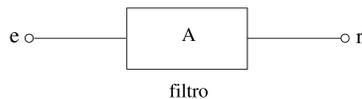
vii) $C \subseteq A \Rightarrow (A \cup B) \cap C^c = (B - C) \cup (A \Delta C)$

iii) $A - (A \Delta B) = A \cap B$

iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

viii) $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap (B \Delta C) = A \cap B$

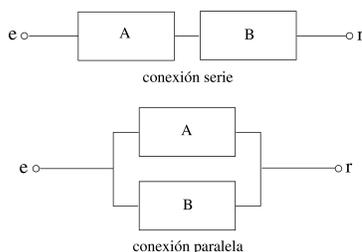
15. Un emisor e envía señales de diferentes frecuencias a un receptor r a través de un cable conductor. Se dispone de filtros que dejan pasar a unas señales sí y a otras no, dependiendo de sus frecuencias.



Cada uno de estos filtros tiene una llave que al accionarla invierte el espectro de frecuencias que el filtro deja pasar.



Los filtros pueden conectarse en serie o en paralelo para formar nuevos filtros.



Se considera ahora en el conjunto de todas las frecuencias y se identifica a cada filtro con el subconjunto formado por aquellas frecuencias que éste deja pasar. Observar que con la identificación recién establecida, se tienen las siguientes correspondencias:

Filtro invertido \leftrightarrow Complemento , Conexión serie \leftrightarrow Intersección , Conexión paralela \leftrightarrow Unión

- i) Diseñar circuitos para la construcción de los siguientes filtros a partir de los filtros A, B y C

- | | | |
|-------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| (a) $(A \cup B)'$ | (c) $A \cup (B \cap C)$ | (e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| (b) $(A \cap B)'$ | (d) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ | (f) $A \Delta B$ |

- ii) Diseñar circuitos para la construcción de los siguientes filtros a partir de los filtros A, B, C, D

- (a) $(D \Delta (A \cap B)) - C$
 (b) $((D \cap A) \Delta (D \cap B')) \cup (A \cap B' \cap (C - D))$
 (c) $(A' \cap B \cap C) \Delta (D' \cap C)$

16. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

17. Sean A, B y C conjuntos. Probar que

- | | |
|--|--|
| i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ | iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ |
| ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ | iv) $(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$ |

Relaciones

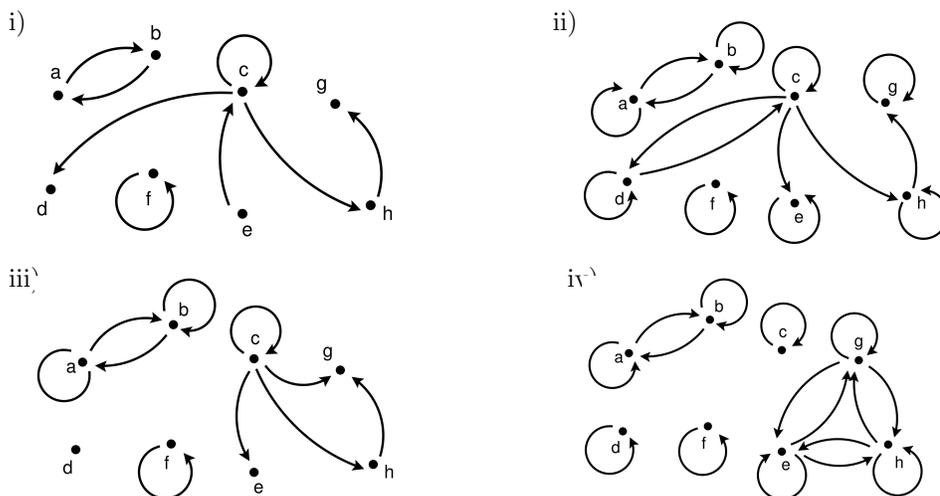
18. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B , y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

- i) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 5)\}$
- ii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 2), (3, 5)\}$
- iii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 3), (3, 5)\}$
- iv) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 7)\}$
- v) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 7), (3, 7)\}$
- vi) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 7)\}$

19. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B :

- i) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$
- ii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a > b$
- iii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par
- iv) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$

20. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

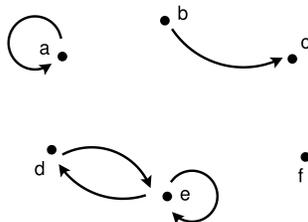


21. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6)\}$$

como está hecho en el ejercicio anterior.

22. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea \mathcal{R} la relación en A representada por el gráfico



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a \mathcal{R} de manera que la nueva relación obtenida sea

- i) reflexiva,
- ii) simétrica,
- iii) transitiva,
- iv) reflexiva y simétrica,
- v) simétrica y transitiva,
- vi) de equivalencia.

23. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación \mathcal{R} en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

- i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
- ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

- iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$
- iv) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / a + b \text{ es par}\}$
- v) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / |a| \leq |b|\}$
- vi) $A = \mathbb{N}$, \mathcal{R} definida por $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow b$ es múltiplo de a
- vii) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, \mathcal{R} definida por $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$

24. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

- i) simétricas y antisimétricas
- ii) de equivalencia y de orden

¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica?

25. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A :

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, f), (f, a), (b, f), (f, b), (c, e), (e, c)\}$$

hallar la clase \bar{a} de a , la clase \bar{b} de b , la clase \bar{c} de c , la clase \bar{d} de d , y la partición asociada a \mathcal{R} .

- 26. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.
- 27. En el conjunto \mathbb{Z} de números enteros, sea la relación de equivalencia dada por la paridad: dos números están relacionados si y solo si tienen la misma paridad (son ambos pares o ambos impares). ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.
- 28. En el conjunto \mathbb{Z} de números enteros, sea la siguiente relación: dos números están relacionados si terminan en el mismo dígito. Verificar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.
- 29. En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de \mathbb{N} , sea la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): dos subconjuntos están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.

Funciones

- 30. Determinar qué relaciones del ejercicio 18 son funciones de A en B , y qué relaciones del ejercicio 23 son funciones de A en A .
- 31. Determinar si \mathcal{R} es una función de A en B en los casos
 - i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$
 - ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$
 - iii) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} / a = 2b - 3\}$
 - iv) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / a + b \text{ es divisible por } 5\}$
- 32. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.
 - i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 12x^2 - 5$
 - ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$
 - iii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (2x, x^2, x - 7)$
 - iv) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{v)} \quad & f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a, b) = 3a - 2b \\ \text{vi)} \quad & f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } a > 0 \\ 1 - 2a & \text{si } a \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

33. i) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n + 1 & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad \text{y } g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n, m) = n(m+1),$$

calcular $(f \circ g)(3, 4)$, $(f \circ g)(2, 5)$, $(f \circ g)(3, 2)$.

ii) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 7 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 7 \end{cases} \quad \text{y } g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, g(n) = \sqrt{n},$$

hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(n) = 13$ y tales que $(f \circ g)(n) = 15$.

34. Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ (cuando se puede) en los casos

$$\text{i)} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 18 \quad \text{y } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 3$$

$$\text{ii)} \quad f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} n - 2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ n + 1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4 \end{cases} \quad \text{y } g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = 4n$$

$$\text{iii)} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (x + 5, 3x) \quad \text{y } g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, g(n) = \sqrt{n}$$

35. Hallar dos funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ f \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\text{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ denota la función identidad del conjunto \mathbb{N} .

36. Sean A , B y C conjuntos. Probar que si $f : B \rightarrow C$ y $g : A \rightarrow B$ son funciones entonces valen

- i) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.
- ii) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva
- iii) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva
- iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva
- v) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva

37. Sea B el conjunto de todos los *bytes*, es decir de todas las expresiones de la forma

$$b_7 b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0,$$

donde $b_i = 0$ o 1 , $0 \leq i \leq 7$, es lo que se llama un *bit*. Por ejemplo 10100110 y 00000001 son bytes.

Se consideran las siguientes funciones de B en B :

- i) R (por *right*): desplaza cada bit un lugar hacia la derecha, pone un 0 en el bit 7 y descarta el bit 0. Por ejemplo $R(10100110) = 01010011$ y $R(00000001) = 00000000$.
- ii) L (por *left*): desplaza cada bit un lugar hacia la izquierda, pone un 0 en el bit 0 y descarta el bit 7. Por ejemplo $L(10100110) = 01001100$ y $L(00000001) = 00000010$.
- iii) A_b (por *and*) efectúa un ‘y’ lógico (\wedge) bit a bit con un byte $b \in B$ dado ($0 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 1 = 0$, $1 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1$). Por ejemplo si $b = 11110001$, $A_b(10100110) = 10100000$ y $A_b(00000001) = 00000001$.
- iv) O_b (por *or*) efectúa un ‘o lógico’ (\vee) bit a bit con un byte $b \in B$ dado ($0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1$, $1 \vee 0 = 1$, $1 \vee 1 = 1$). Por ejemplo si $b = 11110001$, $O_b(10100110) = 11110111$ y $O_b(00000001) = 11110001$.
- v) X_b (por *xor*) efectúa un ‘o lógico exclusivo’ (\vee) bit a bit con un byte $b \in B$ dado ($0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1$, $1 \vee 0 = 1$, $1 \vee 1 = 0$). Por ejemplo si $b = 11110001$, $X_b(10100110) = 01010111$ y $X_b(00000001) = 11110000$.

Calcular $R \circ L$, $L \circ R$, y dado $b \in B$, $A_b \circ A_b$, $A_b \circ O_b$, $O_b \circ A_b$, $X_b \circ X_b$. Una sola de estas funciones es biyectiva: descubrir cuál y encontrar su inversa.