

Probabilidad y Estadística (C)

Ejercicios optativos para resolver con el R

Los ejercicios que siguen son difíciles de resolver analíticamente (aunque si son valientes pueden intentarlo). La idea para todos ellos es hacer una simulación para estimar una probabilidad o comprobar una hipótesis empíricamente (pueden valerse de Google o del help del R por si hay algun comando que no sepan cómo usar).

1. Se tira 10 veces un dado (de 6 caras, equilibrado). Las tiradas son independientes entre sí. Cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados de esas 10 tiradas sea mayor a 40? Aproximarla mediante una simulación en R.
2. Consideramos las palabras donde cada letra es A o B. Dada una de estas palabras, se define la **racha máxima** como la mayor longitud posible de una subsecuencia de letras consecutivas que tenga todas sus letras iguales. Por ejemplo, la racha máxima de AABBBAA es 3, la racha máxima de ABABAB es 1, la racha máxima de AAAAAB es 5. Supongamos que tiramos 20 veces una moneda y anotamos en orden los resultados, escribiendo A si sale cara y B si sale ceca. Cuál es la probabilidad de que la racha máxima sea al menos 5? Aproximarla mediante una simulación en R.
3. Se tiene una barra de metal. Se eligen dos puntos uniformemente (y de forma independiente) en dicha barra y se hace un corte en cada uno de los dos puntos elegidos. De esta forma la barra queda dividida en tres pedazos. Cual es la probabilidad de que con estos tres pedazos se pueda formar un triángulo?

Observación: Tres números positivos a , b y c pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo si y solo si cada uno de los tres es estrictamente menor a la suma de los otros dos. Por ejemplo, 1, 1 y 5 no pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo porque $5 > 1 + 1$. Por otro lado, 3, 4 y 5 sí pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo pues $3 < 4 + 5$, $4 < 3 + 5$ y $5 < 4 + 3$.

4. Dada una permutación de los números del 1 al n , decimos que el número i es un **punto fijo** si dicho número se encuentra en la posición i de la permutación. Se elige al azar (uniformemente) una permutación de los números naturales del 1 al 12. Cuál es la probabilidad de que no tenga puntos fijos?
5. Agustín cumple años y lo está festejando con sus 9 amiguitos. Los 10 chicos se encuentran alrededor de una mesa redonda. La mamá de Agustín quiere repartir bonetes para todos. Empieza dandole un bonete a Agustín. El resto de los bonetes se reparte con el procedimiento que se describe a continuación. En cada paso, tira una moneda equilibrada. Si sale cara, se mueve hacia el chico de la derecha respecto de su posición anterior, si sale ceca se mueve hacia el chico de la izquierda respecto de su posición anterior. En su nueva posición, se fija si el chico correspondiente ya tiene bonete y le da uno en caso de que no tenga. Vuelve a repetir este paso hasta que todos los chicos tienen bonete. Al último amiguito en haber recibido bonete también se le regala un alfajor. La tía de Agustín tiene la hipótesis de que, con este procedimiento, todos los 9 amiguitos de Agustín tienen la misma probabilidad de recibir el alfajor. Hacer una simulación para comprobar o refutar empíricamente la hipótesis de la tía.

6. Se arma una matriz de 2×2 de la siguiente forma: cada uno de los 4 elementos se elige al azar uniformemente entre los naturales del 1 al 1000. Las 4 elecciones se hacen de forma independiente. Cuál es la probabilidad de que el determinante de dicha matriz sea positivo? Aproximarla con una simulación en el R y, si sabe algo de álgebra lineal, intentar conjeturar por qué se obtuvo eso.
7. Un país está compuesto por 40 ciudades, entre las cuales están Buenos Aires y Rosario. El presidente construye las rutas entre las ciudades de la siguiente forma: para cada par de ciudades, tira una moneda. Si sale cara, construye una ruta entre ellas. Si sale ceca, no construye nada. La moneda que tira el presidente no es equilibrada, sino que tiene probabilidad $1/3$ de salir cara y $2/3$ de salir ceca. Cuál es la probabilidad de que haya una secuencia de rutas que conecte Buenos Aires y Rosario? Por qué números deberían reemplazarse $1/3$ y $2/3$ para que dicha probabilidad sea aproximadamente $1/2$?