1. Un sapo tiene 2 hojas para reposar en el lago, una izquierda y una derecha. Cada día decide si se queda en la hoja donde está, o se cambia, tirando una moneda que tiene en cada hoja. Es decir, cuando amanece en la hoja izquierda, tira la moneda que con probablidad $p$ sale cara, y si este es el caso, salta a la hoja derecha. Recíprocamente, si en la hoja derecha obtiene una cara (con probablidad $q$), salta a la izquierda.

   *a*) Escribir la matriz de transición de los saltos del sapo.

   *b*) Esquematizar la cadena con un grafo.

   *c*) Calcular la distribución invariante.

2. En una determinada región, el tiempo de cada día determina las probabilidades para el tiempo del día siguiente, de la siguiente manera: si un día está nublado, es igual de probable que el día siguiente sea nublado o soleado. Mientras que si un día está soleado, hay una probabilidad de 2/3 de que el día siguiente también sea soleado.

   *a*) Construir la matriz de transición $P$ de este proceso. ¿Con qué se puede relacionar? Deducir la distribución invariante.

   *b*) Si hoy está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que dentro de tres días también esté nublado? ¿y si hoy está nublado con probabilidad 1/2?

   *c*) Calcular $P^5$ y $P^{10}$. ¿Se podrá decir algo de $P^n$ para $n$ grande?

3. Suponga que en el mercado se consiguen 3 tipos de gaseosas colas que son: Coca-cola, Pepsi y Manaos. Cuando una persona compra Coca-Cola, existe una probabilidad de que la siga consumiendo del 75 %, un 15 % de que compre Pepsi y un 10 % de que compre Manaos; cuando el comprador actualmente consume Pepsi existe una probabilidad de que la siga comprando de 60 %, un 25 % que compre Coca-Cola y un 15 % Manaos; si en la actualidad consuma Manaos la probabilidad de que la siga consumiendo es del 50 %, un 30 % que compre Coca-Cola y 20 % Pepsi.

   *a*) Elaborar la matriz de transición.

   *b*) Si sabemos que en la actualidad los porcentajes de participación son

   $$(\text{Coca-Cola, Pepsi, Manaos}) = (60\,\%, 30\,\%, 10\,\%)$$

   Hallar la probabilidad que tiene cada marca luego de dos períodos.

*Para leer sobre Cadenas de Markov a tiempo discreto en espacios finitos: Markov Chains and Mixing Times. David A. Levin. Yuval Peres. Elizabeth L. Wilmer. University of Oregon. El ejercicio 1 es el Ejemplo 1.1 del libro.*