1. (a) Sea $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, probar que $M_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$ para $t < \lambda$.

   (b) Sea $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, probar que $M_X(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}$ para $t < \lambda$.

   (c) Sea $X_1, X_2, ..., X_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$ independientes. Probar que $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \sim \Gamma(n, \lambda)$.

   (d) Sea $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$, $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$ independientes. Probar que $X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

2. (a) Sea $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, probar que $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, probar que $M_X(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Sea $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ independientes. Probar que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

3. Una fábrica produce bombones de chocolate, y los vende en paquetitos de dos unidades: uno negro y uno blanco. El peso (en gramos) de un bombón de chocolate negro es una v.a. X con $\mathbb{E}(X) = 50$ y $V(X) = 0,15$, y el peso (en gramos) de un bombón de chocolate blanco es una v.a. Y con $\mathbb{E}(Y) = 40$ y $V(Y) = 0,10$ y el peso (en gramos) de un paquetito vacío es una v.a. Z con $\mathbb{E}(Z) = 10$ y $V(Z) = 0,05$. Se define la v.a. $W =$ peso (en gramos) de un paquetito lleno .

   (a) Hallar $\mathbb{E}(W)$ y $V(W)$.

   (b) Hallar una cota inferior para la probabilidad de que W esté entre $98.5 y 101.5$.

   (c) Si se eligen al azar 10 paquetitos de la fábrica, hallar una cota inferior para la probabilidad de que el peso promedio de los 10 paquetitos esté entre 98.5 y 101.5.

   (d) ¿Cuántos paquetitos deberían elegirse para asegurarse que la probabilidad de que el peso promedio esté entre 98.5 y 101.5 sea al menos 0.999?