Clase 14/4

Repaso de clase pasada

Bases y coordenadas:

Proposición: Sea V un k-ev de dimensión n y sea $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base de V. Entonces $\forall v\in V$, existen únicos $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in k \,/\, v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$.

Dem:

Existencia: B es base $\Rightarrow$ B es un sistema de generadores $\Rightarrow$ por definición de sistema de generadores $\forall v$, existen $\alpha_1\dots\alpha_n\in k \,/\, v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$

Unicidad: Sean $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in k$ y $\beta_1,\dots,\beta_n\in k \,/$ $v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$ y $v=\beta_1 v_1+\dots+\beta_n v_n$ $\Rightarrow$

$\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=\beta_1 v_1+\dots+\beta_n v_n$ $\Rightarrow$

$(\alpha_1-\beta_1)v_1+\dots+(\alpha_n-\beta_n)v_n=0$

luego, como $B=\{v_1\dots v_n\}$ es base $\Rightarrow$ B es un conjunto li, entonces $\alpha_1-\beta_1=\alpha_2-\beta_2=\dots=\alpha_n-\beta_n=0$

$\Rightarrow$ $\alpha_1=\beta_1,\dots,\alpha_n=\beta_n$.

Notación: A estos escalares $\alpha_1\dots\alpha_n$ se los llama coordenadas de v en la base B y se nota

$$(v)_B=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

Definición (matriz de cambio de base)

Sea V un k-ev. de dimensión n y $B=\{v_1,\dots,v_n\}$, $B'=\{w_1,\dots,w_n\}$ bases de V. Se llama matriz de cambio de base de B a B' a la matriz $C(B,B')\in k^{n\times n}$ que satisface $C(B,B')\,(v)_B^t=(v)_{B'}^t \quad \forall v\in V$.

OBS: Esta matriz es única y está caracterizada por

$$C(B,B')=\left(\underbrace{(v_1)_{B'}^t}_{\text{1ra columna de } C(B,B')}\ \middle|\ \underbrace{(v_2)_{B'}^t}_{\text{2da columna de } C(B,B')}\ \middle|\ \cdots\ \middle|\ \underbrace{(v_n)_{B'}^t}_{n\text{-ésima columna de } C(B,B')}\right)$$

Dem de la OBS:

Notemos que $(v_1)_B=(1,0,\dots,0)$ ya que v_1 tiene como coordenadas en la base B a $(1,0,\dots,0)$ ya que $v_1=1.v_1+0.v_2+\dots+0.v_n$.

Y como $C(B,B')\,(v)_B^t=(v)_{B'}^t\ \forall v\in V$, en particular si $v=v_1$ se tiene que

$$C(B,B')\,(v_1)_B^t=(v_1)_{B'}^t$$

$$\| $$

$$\underbrace{C(B,B')\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{\substack{\| \\ \text{primera columna de } C(B,B') \text{ por como} \\ \text{es el producto de una matriz por vector.}}}$$

De la misma manera, para cada $i=1\ldots,n$

$$C(B,B')\, e_i^{\,t} = C(B,B') \cdot (v_i)_B^{\,t} = (v_i)_{B'}^{\,t}$$

porque $(v_i)_B = e_i$ — por definición de $C(B,B')$

Obteniendo el resultado deseado.

<u>Ejercicio</u>: Dado V un k-ev de dim n y B, B' bases de V $\Rightarrow$ $C(B,B')$ es inversible y

$$\left[C(B,B')\right]^{-1} = C(B',B').$$

<u>Dem</u>: Para probar que $C(B,B')$ es inversible y $C(B'\,B)$ es su inversa, alcanza con probar que $C(B,B').\, C(B',B) = Id_{n\times n}$

Para esto observemos que una matriz $A = Id_{n\times n}$ $\Leftrightarrow$ $Ae_i^t = e_i^t$ $\forall$ $i=1\ldots n$ (De esta manera estoy diciendo que una matriz es la identidad si cada columna i es el vector canónico e_i^t).

Veamos esto para $A = C(B,B')\, C(B',B)$

$$C(B,B')\, C(B',B) \underbrace{e_i^t}_{(v_i')_{B'}} = C(B,B')\, C(B',B)\, (v_i')_{B'} =$$

$= C(B,B')\, (v_i')_B$

$= (v_i')_{B'} = e_i^t$ ✓

Observemos que si llamo $B' = \{v_1',\ldots,v_n'\}$ $\Rightarrow$ $(v_i')_{B'} = e_i^t$

Ejemplo de cambio de base.

Vamos a ver un ejemplo de como armar la matriz de cambio de base.

Para eso, vamos a considerar dos bases en $\mathbb{R}^2$:

$$B = \{(1,1),(1,2)\} \quad y \quad B' = \{(1,0),(0,1)\}$$

B': base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Ahora nos preguntamos: dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$, $v=(a,b)$ con, $a,b \in \mathbb{R}$, ¿Qué coordenadas tiene?

1°) Coordenadas en la base B' (la canónica):

$$\boxed{(v)_{B'} = (a,b)}$$

pues $(a,b) = a.(1,0) + b.(0,1)$.

2°) Coordenadas en la base B:

Busco α y β tal que $(a,b) = \alpha(1,1) + \beta(1,2)$.

Es decir, estoy buscando escribir el vector $v \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los elementos de la base. Recordemos que por ser una base, esta combinación lineal es única.

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}(a,b) &= \alpha(1,1) + \beta(1,2)\\ &= (\alpha+\beta, \alpha+2\beta)\end{aligned}$$

Ahora resuelvo el sistema lineal:

$$\begin{cases}\alpha+\beta = a\\ \alpha+2\beta = b\end{cases}$$

Si lo escribo en forma de matriz, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

y lo resolvemos haciendo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-a \end{array}\right)$$

De donde $\boxed{\beta = b-a}$ y $\alpha = a-\beta$
$= a-(b-a)$

$$\boxed{\alpha = 2a-b}$$

Es decir, $(a,b) = (2a-b)(1,1) + (b-a)(1,2)$

y en coordenadas: $\boxed{(v)_{B'} = (2a-b\, ,\, b-a)}$

Ahora queremos hallar la matriz de cambio de base de B' a B. O sea, buscamos una matriz tal que si queremos "cambiar" las coordenadas de v en la base B' a la base B, solo tengamos que multiplicar el vector de coordenadas en B' por esa matriz.

Notación:

$$(v)_B = \underbrace{C(B', B)}\,(v)_{B'}$$

$\downarrow$ Coord. de v en B

$\downarrow$ matriz de cambio de base de B' a B.

$\downarrow$ coord. de v en B'

Por la cuenta que hicimos antes, tiene que ser:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2a-b \\ b-a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coord en} \\ \mathcal{B}}} = C(\mathcal{B}',\mathcal{B}) \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coord en} \\ \mathcal{B}'}}$$

Observemos que $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b \\ -a+b \end{pmatrix}$

es decir, la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ funciona <u>para todo v</u>.

Y como probamos que la matriz de cambio de base es única, tiene que ser:

$$\boxed{C(\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Notemos lo siguiente:

$\underset{\text{primer vector de } \mathcal{B}'}{(1,0)} = 2\,(1,1) + (-1)\,(1,2)$ elementos de $\mathcal{B}$.

$\underset{\text{segundo vector de } \mathcal{B}'}{(0,1)} = (-1)\,(1,1) + 1\cdot(1,2)$

Es decir, $C(\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \Big((1,0)_{\mathcal{B}} \;\Big|\; (0,1)_{\mathcal{B}} \Big)$

o sea, la columna j de $C(\mathcal{B}',\mathcal{B})$ es el vector de coordenadas del elemento j de la base $\mathcal{B}'$, respecto a la base $\mathcal{B}$.

Si ahora quiero $C(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ recuerdo que:

$$\underline{C(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \left[C(\mathcal{B}',\mathcal{B})\right]^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2º vector de $\mathcal{B}$, escrito en la base canónica.

1º vector de $\mathcal{B}$ escrito en la base canónica

Ej 2: Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$.

Sean las bases $B = \{1, 1+x^2, x+x^3, x\}$

$B' = \{2, x^2, -x+x^2, x^3\}$

Ejercicio: verificar que son bases de $\mathbb{R}_3[x]$!

Hallemos la matriz de cambio de base $C(B,B')$.

Forma 1: escribo cada vector de la base B en término de la base B', y las coordenadas halladas son las columnas de $C(B,B')$.

$$1 = \frac{1}{2}\cdot 2 + 0\cdot x^2 + 0\cdot(-x+x^2) + 0\cdot x^3$$

$$1+x^2 = \frac{1}{2}\cdot 2 + 1\cdot x^2 + 0\cdot(-x+x^2) + 0\cdot x^3$$

$$x+x^3 = 0\cdot 2 + 1\cdot x^2 + (-1)\cdot(-x+x^2) + 1\cdot x^3$$

$$x = 0\cdot 2 + 1\cdot x^2 + (-1)(-x+x^2) + 0\cdot x^3$$

Luego:

$$C(B,B') = \left((1)_{B'} \;\middle|\; (1+x^2)_{B'} \;\middle|\; (x+x^3)_{B'} \;\middle|\; (x)_{B'} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Forma 2: en general, es fácil escribir la matriz de cambio de base de una base $\mathcal{B}$ a la canónica E. Entonces, podemos hallar $C(\mathcal{B},E)$, $C(\mathcal{B}',E)$ y luego usar:

$$C(\mathcal{B},\mathcal{B}') = C(E,\mathcal{B}')\, C(\mathcal{B},E)$$
$$= \left[C(\mathcal{B}',E)\right]^{-1} C(\mathcal{B},E)$$

En este caso: $E = \{1, x, x^2, x^3\}$

$$C(\mathcal{B},E) = \left((1)_E \mid (1+x^2)_E \mid (x+x^3)_E \mid (x)_E \right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(\mathcal{B}',E) = \left((2)_E \mid (x^2)_E \mid (-x+x^2)_E \mid (x^3)_E \right)$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$