Proposición 1. *El conjunto de conectores lógicos* $\{\vee, \rightarrow\}$ *no forman un conjunto adecuado.*

Observación 1. *Recordemos que para que un conjunto de conectores sea adecuado tiene que poderse construir cualquier tabla de verdad con solo los conectivos que parecen en ese conjunto. Luego, aunque pueda ser obvio, para probar que algún conjunto no lo es, una buena estrategia es encontrar una tabla que no sea construible. Notemos que el estudiar una tabla, y si es o no construible, est fija de antemano la cantidad de variables involucradas en la fórmula que se pretende construir, lo cual facilita la tarea mucho.*

Prueba de la Proposición. Es frecuente que un buen candidato a tabla de verdad sea aquella que toma todos los valores 0, o dicho de otra manera, aquella que surge de considerar los valores que toma una contradicción ($\perp$). Este suele ser el camino más sencillo a tomar. Además puede verse que $\{\rightarrow, \perp\}$ es un conjunto adecuado de conectores luego, si es cierto que $\{\vee, \rightarrow\}$ no lo es, no podremos construir $\perp$, ¡vamos por buen camino!.

Consideremos la tabla

p_1	$\perp$
1	0
0	0

y veamos que no existe formula P construida solo con $\{\vee, \rightarrow, p_1\}$ que sea una contradicción (o sea que tome el valor 0 para cualquier valor de p_1). La prueba la haremos por inducción en la complejidad de la fórmula.

Si la complejidad de la fórmula es 0, entonces será $P = p_1$, en este caso claramente P no es una contradicción. Asumamos ahora la siguiente hipótesis inductiva: no existe manera de escribir una contradicción con los conectores

$\{\vee, \rightarrow\}$ y la variable p_1 en una formula de complejidad menor o igual que n. Una forma de interpretar dicha hipótesis inductiva es que para toda formula de complejidad menor o igual que n hecha solo con $\{\vee, \rightarrow, p_1\}$ existe una valuación boolena que toma el valor 1 en ella. Veamos que esto vale para complejidad $n+1$ y habremos terminado la prueba.

Sea P una formula construida solo con $\{\vee, \rightarrow, p_1\}$ de complejidad $n+1$. Observemos que en este caso existen Q, R dos formulas construidas solo con $\{\vee, \rightarrow, p_1\}$ tales que:

1. $P = Q \rightarrow R$
2. $P = Q \vee R$,

estudiemos ambos casos.

En cualquiera de los dos casos las complejidades de Q y R son menores o iguales a n, por lo que (gracias a la hipótesis inductiva), existen v_Q y v_R valuaciones booleanas tales que $v_Q(Q) = v_R(R) = 1$.

En el caso 1. se tiene

$$v_R(P) = v_R(Q \rightarrow R) = \max\{1 - v_R(Q), v_R(R)\} = 1,$$

en el caso 2. se sigue

$$v_Q(P) = v_Q(Q \vee R) = \max\{v_Q(Q), v_Q(R)\} = 1,$$

por lo cual en cualquier caso hemos visto que P no puede ser una contradicción. Por inducción sigue el resultado en general. $\square$